تقدير مخصصات الخسارة فى تأمينات الممتلكات باستخدام النماذج الرياضية

د. إبراهيم محمد مهدى   د. محمد توفيق البلقيني   جيهان مسعد المعداوى
كلية التجارة – جامعة المنصورة   معيده

مقدمة:

أثناء العقود الأخيرة، قد أقترح الإكتواريين طرق عديدة لحساب مخصص الخسائر تعتمد على run-off triangles. وفى كل هذه الطرق، يفترض أن كل المطالبات يتم تسويتها خلال عدد محدد لسنوات التطور وتطور الخسائر السنوية أو التراكمية عن نفس العدد لسنوات الحادث يكون معروف حتى السنة الميلادية الحالية حيث أن الخسائر يمكن تمثيلها فى مثلث run-off. وأكثر الطرق شيوعاً، طريقة chain-ladder وطريقة Bornhuetter-Ferguson. لذلك فى هذا البحث نحلل مجموعة من الطرق والنماذج الهامة لتقدير مخصص الخسارة

الهدف من البحث:

يهدف هذا البحث إلى تقدير مخصص الخسارة فى فرع تأمين الحريق باستخدام طرق ونماذج تعتمد على أسلوب (run-off triangles) ومقارنة هذه الطرق المختلفة من خلال مقارنة الخسائر التراكمية المستقبلية من أجل التوصل إلى أفضل تقدير(predictors) وتحديد مدى التنبؤ بالاعتماد على مصادر المعلومات المتاحة، ومقارنة المحفظة التأمينية تحت مجموعة من اعتبارات السوق.

ولتطبيق هذه الطرق تم استخدام بيانات شركة مصر للتأمين عن مخصص التعويضات تحت التسوية والتعويضات المسددة عن عام ٢٠٠٨ والأعوام الخمسة السابقة له فى فرع الحريق. وتتضمن البيانات الخسائر المدفوعة، لأن مشكلة مخصص الخسارة يمكن التعبير عنها بالخسائر التراكمية المدفوعة أو الخسائر التى حدثت ولم يتم تسويتها (IBNR)، وأيضاً الأقساط المكتسبة، (مخصص التعويضات تحت التسوية) باستخدام أسلوب (Run-Off Triangles).

مشكلة البحث:

إن الطريقة المتبعة فى السوق المصرى لتقدير مخصصات الخسارة هى (chain-ladder method) التى تعرف باسم طريقة التسلسل السلمى، وتتميز هذه الطريقة ببساطتها فى عملية التقدير وفى تفسير النتائج، ولكن يعاب عليها أن هذه الطريقة تتضمن تحيزات تؤدى إلى تقديرات مبالغ فيها. لذلك كان من الأهمية البحث عن طرق بديلة لتقدير مخصص الخسارة.

تطبيق النموذج الرياضي:

يتم تطبيق النموذج المقترح وهو نموذج (Bornhuetter-Ferguson) الذى يستخدم كأساس لتقدير مخصصات الخسارة فى التأمينات العامة على فرع تأمين الحريق وذلك من خلال مجموعة من الطرق الرياضية المستخدمة فى تقدير مخصص الخسارة والتي تعتمد على (run-off triangle) تحت افتراض أن تطور الخسائر لأى سنة حادث يتبع نمط تطور عام لكل سنوات الحادث.

وجمعت البيانات عن ست سنوات من (٢٠٠٢-٢٠٠٣) إلى (٢٠٠٧- ٢٠٠٨) وقد تم تنظيم البيانات فى شكل (run-off triangle) وفقاً لسنة الحادث وسنة السداد (التطور) (السنة التى دفع فيها التعويض). وتشير سنة التطور إلى عدد السنوات الميلادية التى يتم قياسها من سنة الحادث، ولـ[illegible] (k=0) تشير إلى سنة الحادث.

جدول رقم (١): يوضح (run-off triangle) كلاً من الخسائر السنوية والتراكمية المدفوعة لفرع الحريق (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)		Development year (k) 0	1	2	3	4	5
2003	0	5850	10251	362	144	27	800
		5850	16101	16463	16607	16634	17434
2004	1	8486	6565	13937	157	37	
		8486	15051	28988	29145	29182	
2005	2	9718	19745	465	2453		
		9718	29463	29928	32381		
2006	3	9736	25633	1536			
		9736	35369	36905			
2007	4	10942	119087				
		10942	130029				
2008	5	75265					
		75265					

حيث أن: $S_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} Z_{i,k}$

$S_{i,k}$: ترمز للخسائر التراكمية لسنة الحادث (i) وسنة التطور (k)

$Z_{i,k}$: ترمز للخسائر السنوية لسنة الحادث (i) وسنة التطور (k)

جدول رقم (٢): يتضمن (run-off triangle) للخسائر التراكمية المدفوعة للسنة الميلادية الحالية والخسائر النهائية المتوقعة والأقساط المكتسبة ونمط التطور للأنصبة التراكمية (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	π_i	$\hat{\alpha}_i$	Development year (k) 0	1	2	3	4	5
0	37684	35800						17434
1	18694	17759					29182	
2	41667	39584				32381		
3	30685	29151			36905			
4	23484	22310		130029				
5	128873	122429	75265					
$\hat{\gamma}_k$			0.335551	0.92354	0.944304	0.952564	0.954113	1

$\hat{\alpha}_i$: (Prior Ultimates) الخسائر النهائية المتوقعة لسنة الحادث (i).

π_i : الأقساط المكتسبة لسنة الحادث(i).

$\hat{\gamma}_k$: (Prior Quotas) أنصبة تطور الخسائر التراكمية في سنة التطور (k).

- الخسائر النهائية المتوقعة لسنة الحادث (i) : تمثل ٩٥% من الأقساط المكتسبة لسنة الحادث(i).
- نمط التطور لأنصبة الخسائر التراكمية ($\hat{\gamma}_{0,k}$)، يعرف كالتالي:

$$\hat{\gamma}_{0,k} = \frac{S_{0,k}}{S_{0,n}}$$

وتكون متطابقة لكل سنوات الحادث

ويتم استخدام البيانات السابقة في إيجاد القيم المتنبأ بها ومن ثم التوصل إلى تقدير مخصص الخسارة في كل طريقة بهدف مقارنة القيم الناتجة لاختيار أفضل طريقة يمكن إتباعها.

(١) Bornhuetter-FergusonMethod (B-F):

يتم حساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة (غير المشاهدة) باستخدام طريقة (B-F) من خلال المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{BF} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i$$

حيث أن:

$S_{i,n-i}$: الخسارة التراكمية للسنة الحالية (n).

$\hat{\gamma}_k$: أنصبة تطور الخسائر التراكمية في سنة التطور (k).

$\hat{\gamma}_{n-i}$: أنصبة تطور الخسائر التراكمية في سنة التطور (n-i).

$\hat{\alpha}_i$: الخسائر النهائية المتوقعة لسنة الحادث (i)

جدول رقم (٣): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (B-F) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	π_i	$\hat{\alpha}_i$	Development year (k)					
			0	1	2	3	4	5
0	37684	35800						17434
1	18694	17759					29182	29997
2	41667	39584				32381	32442	34259
3	30685	29151			36905	37146	37191	38529
4	23484	22310		130029	130492	130677	130711	131735
5	128873	122429	75265	147252	149794	150805	150995	156613
$\hat{\gamma}_k$			0.335551	0.92354	0.944304	0.952564	0.954113	1

من جدول رقم (٣) يمكن حساب:

Total Reserve (T R): قيمة المخصص الإجمالي للمطالبات التراكمية غير المشاهدة (المتوقعة).

First-Year Reserve(F-Y R): مخصص أول سنة ميلادية غير مشاهدة، ويتم حسابه باستخدام الخسائر السنوية.

جدول رقم (٤): يوضح (T R) و (F-Y R) باستخدام طريقة (B-F) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	815	815
2	61	1878
3	241	1624
4	463	1706
5	71987	81348
Σ	73567	87371

(٢) Loss-Development Method (L-D):

يتم حساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (L-D) من خلال المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{LD}(\hat{\gamma}) := \hat{\gamma}_k \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}}$$

جدول رقم (٥): باستخدام بيانات الجدول التالي يمكن حساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	Development year (k)					
	0	1	2	3	4	5
0						17434
1					29182	
2				32381		
3			36905			
4		130029				
5	75265					
$\hat{\gamma}_k$	0.335551	0.92354	0.944304	0.952564	0.954113	1

حيث أن : $\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}) := \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}}$

($\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma})$): تمثل الخسائر النهائية المتوقعة لطريقة (L-D) باستخدام أنصبة تطور الخسائر التراكمية.

جدول رقم (٦): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (L-D) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma})$	Development year (k)					
		0	1	2	3	4	5
0	17434						17434
1	30585					29182	30585
2	33994				32381	32434	33994
3	39082			36905	37228	37288	39082
4	140794		130029	132952	134115	134333	140794
5	224303	75265	207152	211810	213663	214010	224303
$\hat{\gamma}_k$		0.335551	0.92354	0.944304	0.952564	0.954113	1

جدول رقم (٧): يوضح (T R) و (F-Y R) بإستخدام طريقة (L-D) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	1403	1403
2	53	1613
3	323	2177
4	2923	10765
5	131887	149038
$\sum$	136590	164996

(٣) Chain-Ladder Method (C-L):

لحساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-L) يكون على النحو التالي:

١- حساب $\hat{\varphi}_k^{CL}$ (Chain-Ladder Factor): حيث تمثل عوامل تطور الخسائر التراكمية لطريقة C-L

$$\hat{\varphi}_k^{CL} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

جدول رقم (٨): يوضح عوامل التطور الخاصة بطريقة (C-L) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	Development year (k)					
	0	1	2	3	4	5
0	5850	16101	16463	16607	16634	17434
1	8486	15051	28988	29145	29182	
2	9718	29463	29928	32381		
3	9736	35369	36905			
4	10942	130029				
5	75265					
$\hat{\varphi}_k^{CL}$		5.053	1.170	1.037	1.001	1.048

٢- حساب الخسائر التراكمية المتوقعة ($S_{i,k}$)، حيث أن: ($i + k \geq n$) من المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{CL} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^{k} \hat{\varphi}_l^{CL}$$

جدول رقم (٩): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-L) بمعلومية عوامل التطور (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	Development year (k)					
	0	1	2	3	4	5
0						17434
1					29182	30585
2				32381	32426	33986
3			36905	38253	38307	40149
4		130029	152111	157668	157888	165482
5	75265	380284	444864	461117	461762	483970
$\hat{\varphi}_k^{CL}$		5.053	1.170	1.037	1.001	1.048

وبمعلومية $\hat{\varphi}_k^{CL}$ يمكن حساب $\hat{\gamma}_k^{CL}$

حيث أن:

$\hat{\gamma}_k^{CL}$: (Chain-Ladder Quotas) تمثل أنصبة تطور الخسائر التراكمية لطريقة (C-L)

ويتم ذلك باستخدام المعادلة التالية:

$$\hat{\gamma}_k^{CL} = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{CL}}$$

جدول رقم (١٠) : يوضح أنصبة التطور لطريقة (C-L) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (I)	Development year (k)					
	0	1	2	3	4	5
0						17434
1					29182	
2				32381		
3			36905			
4		130029				
5	75265					
$\hat{\varphi}_i^{CL}$		5.053	1.170	1.037	1.001	1.048
$\frac{1}{\hat{\varphi}_i^{CL}}$		0.1979	0.8548	0.9648	0.9986	0.9541
$\hat{\gamma}_i^{CL}$	0.1555	0.7858	0.9192	0.9528	0.9541	1

ومن ثم يمكن حساب الخسائر التراكمية المتوقعة لطريقة (C-L) بمعلومية أنصبة تطور (C-L) باستخدام المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{CL} = \hat{\gamma}_k^{CL} \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{CL}}$$

جدول رقم (١١): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-L) بمعلومية أنصبة التطور (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (I)	$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}^{CL})$	Development year (k)					
		0	1	2	3	4	5
0	17434						17434
1	30586					29182	30586
2	33986				32381	32426	33986
3	40149			36905	38253	38306	40149
4	165482		130029	152111	157668	157886	165482
5	483970	75265	380284	444864	461117	461756	483970
$\hat{\gamma}_i^{CL}$		0.1555	0.7858	0.9192	0.9528	0.9541	1

حيث أن:

$$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}^{CL}) = \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{CL}}$$

حيث يتم في المعادلة السابقة يتم حساب الخسائر النهائية المتوقعة باستخدام معادلة الخسائر النهائية المتوقعة لطريقة (L-D) ولكن بمعلومية أنصبة تطور الخسائر التراكمية لطريقة (C-L)، حيث ينتج منها طريقة (C-L).

جدول رقم (١٢): يوضح(T R) و (F-Y R) باستخدام طريقة C-L (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (I)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	1404	1404
2	45	1605
3	1348	3244
4	22082	35453
5	305019	408705
$\sum$	329898	450411

(٤) Chain-Ladder Quotas / Prior Ultimates:

حساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من $(\hat{\gamma}_k^{CL})$ و $(\hat{\alpha}_i)$ من خلال المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{CL} - \hat{\gamma}_{n-i}^{CL})\hat{\alpha}_i$$

جدول رقم (١٣): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من $(\hat{\gamma}_k^{CL})$ و $(\hat{\alpha}_i)$ (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (I)	$\hat{\alpha}_i$	Development year (k)					
		0	1	2	3	4	5
0	35800						17434
1	17759					29182	29997
2	39584				32381	32433	34250
3	29151			36905	37884	37922	39260
4	22310		130029	133006	133755	133785	134809
5	122429	75265	152425	168762	172874	173035	178655
$\hat{\gamma}_k^{CL}$		0.1555	0.7858	0.9192	0.9528	0.9541	1

جدول رقم (١٤): يوضح(T R) و (F-Y R) باستخدام كلاً من $(\hat{\gamma}_k^{CL})$ و $(\hat{\alpha}_i)$ (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (I)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	815	815
2	52	1869
3	979	2355
4	2977	4780
5	77160	103390
$\sum$	81984	113209

(٥) Cape-Cod method (C-C):

لحساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-C) يكون على النحو التالي:

باستخدام بيانات جدول رقم (٤-٤) يمكن:

١- حساب $\hat{K}^{CC}$: وهي نسبة خسارة C-C من المعادلة التالية:

$$\hat{K}^{CC} := \frac{\sum_{i=0}^{n} S_{i,n-i}}{\sum_{i=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-i}\pi_i}$$

ويتم توضيح ذلك من خلال الجدول التالى:

جدول رقم (١٥) : يوضح كيفية حساب ($\hat{K}^{CC}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident	$S_{i,n-i}$	$\hat{\gamma}$	π	$\hat{\gamma}\ \pi$
0	17434	1	37684	37684
1	29182	0.954113	18694	17836.19
2	32381	0.952564	41667	39630.48
3	36905	0.944304	30685	28975.97
4	130029	0.923540	23484	21688.41
5	75265	0.335551	128873	43243.46
$\sum$	321196			189118.5

$$\hat{K}^{CC} = \frac{321196}{189118.5} = 1.698385$$

٢- حساب الخسائر النهائية المتوقعة لسنة الحادث i:

$$\hat{\alpha}_i^{CC} := \pi_i \hat{K}^{CC}$$

٣- حساب الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-C) من خلال المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{CC} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\pi_i \hat{K}^{CC}$$

جدول رقم (١٦): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-C) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (I)	π_i	$\hat{\alpha}_i^{CC}$	Development year (k)					
			0	1	2	3	4	5
0	37684	64002						17434
1	18694	31750					29182	30639
2	41667	70767				32381	32491	35738
3	30685	52115			36905	37335	37416	39808
4	23484	39885		130029	130857	131137	131248	133079
5	128873	218876	75265	203962	208506	210314	210653	220697
$\hat{\gamma}_k$			0.335551	0.92354	0.944304	0.952564	0.954113	1

جدول رقم (١٧): يوضح(T R) و (F-Y R) باستخدام طريقة (C-C) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (I)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	1457	1457
2	110	3357
3	430	2903
4	828	3050
5	128697	145432
$\sum$	131522	156198

(٦) / Chain-Ladder Quotas: Cape-Cod Ultimates

حساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من ($\hat{\gamma}_k^{CL}$) و ($\hat{\alpha}_i^{CC}$):

حيث أن:

$\hat{\gamma}_k^{CL}$: (Chain-Ladder Quotas) تمثل أنصبة تطور الخسائر التراكمية لطريقة (C-L).

$\hat{\alpha}_i^{CC}$: (Cape-Cod Ultimates) تمثل الخسائر النهائية المتوقعة لطريقة (C-C).

يكون على النحو التالى:

باستخدام بيانات جدول رقم (٤-٤) يمكن:

١- حساب ($\hat{K}^{CC}$) بمعلومية ($\hat{\gamma}_k^{CL}$) من المعادلة التالية:

$$\hat{K}^{CC} := \frac{\sum_{i=0}^{n} S_{i,n-i}}{\sum_{i=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-i}^{CL}\,\pi_i}$$

ويتم توضيح ذلك من خلال الجدول التالى:

جدول رقم (١٨): يوضح كيفية حساب ($\hat{K}^{CC}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	$S_{i,5-i}$	$\hat{\gamma}_{5-i}^{CL}$	π_i	$\hat{\gamma}_{5-i}^{CL}\ \pi_i$
0	17434	1	37684	37684
1	29182	0.954113	18694	17836.19
2	32381	0.95278	41667	39699.48
3	36905	0.919197	30685	28205.56
4	130029	0.785759	23484	18452.76
5	75265	0.155516	128873	20041.81
$\sum$	321196			161919.8

$$\hat{K}^{CC} = \frac{321196}{161919.8} = 1.983673$$

٢- حساب الخسائر النهائية المتوقعة لسنة الحادث (i) بمعلومية ($\hat{\gamma}_k^{CL}$):

$$\hat{\alpha}_i^{CC} := \pi_i \hat{K}^{CC}$$

٣- حساب الخسائر التراكمية المتوقعة بمعلومية ($\hat{\gamma}_k^{CL}$) و ($\hat{\alpha}_i^{CC}$) باستخدام المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{CC,CL} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{CL} - \hat{\gamma}_{n-i}^{CL})\,\pi_i \hat{K}^{CC}$$

جدول رقم (١٩): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة بمعلومية ($\hat{\gamma}_k^{CL}$) و ($\hat{\alpha}_i^{CC}$).

Accident year (i)	π_i	$\hat{\alpha}_i^{CC}$	Development year (k)					
			0	1	2	3	4	5
0	37684	74753						17434
1	18694	37083					29182	30884
2	41667	82654				32381	32490	36284
3	30685	60869			36905	38949	39030	41823
4	23484	46585		130029	136245	137810	137871	140009
5	128873	255642	75265	236382	270494	279079	279417	291151
$\hat{\gamma}_k^{CL}$			0.155516	0.785759	0.919197	0.95278	0.954113	1

جدول رقم (٢٠): يوضح (T R) و (F-Y R) باستخدام ($\hat{\gamma}_k^{CL}$) و ($\hat{\alpha}_i^{CC}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (I)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	1702	1702
2	109	3903
3	2044	4918
4	6216	9980
5	161117	215886
$\sum$	171188	236289

(٧) Additive Method (AD):

١- يطلق عليها أيضاً طريقة نسبة الخسارة السنوية ، لذلك يتم إيجاد الخسائر السنوية وهي موضحة في الجدول التالي:

جدول رقم (٢١): يوضح (run-off triangle) للخسائر السنوية لفرع الحريق (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (I)		Development year (k)					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	5850	10251	362	144	27	800
2004	1	8486	6565	13937	157	37	
2005	2	9718	19745	465	2453		
2006	3	9736	25633	1536			
2007	4	10942	119087				
2008	5	75265					

٢- يتم حساب نسبة الخسارة السنوية من خلال المعادلة التالية:

$$\hat{\zeta}_k^{AD} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j}$$

حيث أن: $\hat{\zeta}_k^{AD}$ (additive incremental loss ratio): تمثل نسبة الخسارة السنوية لسنة التطور(k) في طريقة (AD).

٣- يتم إكمال الجدول رقم (٢١) بالأقساط الخاصة بسنة الحادث (i) ونسبة الخسارة السنوية لسنة التطور(k) في طريقة (AD).

جدول رقم (٢٢): يوضح (run-off triangle) للخسائر السنوية والأقساط و ونسبة الخسارة السنوية (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	π_i	Development year (k)					
		0	1	2	3	4	5
0	37684	5850	10251	362	144	27	800
1	18694	8486	6565	13937	157	37	
2	41667	9718	19745	465	2453		
3	30685	9736	25633	1536			
4	23484	10942	119087				
5	128873	75265					
$\hat{\zeta}^{AD}$		0.426903	1.190961	0.126622	0.028089	0.00113519	0.0212292

٤- يتم حساب الخسائر السنوية الغير مشاهدة باستخدام طريقة (AD) من خلال المعادلة التالية:

$$\hat{Z}_{i,k}^{AD} := \hat{\zeta}_k^{AD} \pi_i$$

جدول رقم (٢٣): يوضح الخسائر السنوية المتوقعة بإستخدام طريقة (AD).

Accident year (i)	π_i	Development year (k)					
		0	1	2	3	4	5
0	37684	5850	10251	362	144	27	800
1	18694	8486	6565	13937	157	37	397
2	41667	9718	19745	465	2453	47	885
3	30685	9736	25633	1536	862	35	651
4	23484	10942	119087	2974	660	27	499
5	128873	75265	153483	16318	3620	146	2736
$\hat{\zeta}_k^{AD}$		0.426903	1.190961	0.126622	0.028089	0.00113519	0.0212292

٥- يمكن الحصول على الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{AD} := S_{i,n-i} + \sum_{l=n-i+1}^{k} \hat{Z}_{i,l}^{AD}$$

جدول رقم (٢٤): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (AD).

Accident year (i)		Development year (k)					
		0	1	2	3	4	5
2003	0	5880	16101	16463	16607	16634	17434
2004	1	8486	15051	28988	29145	29182	29579
2005	2	9718	29463	29928	32381	32428	33313
2006	3	9736	35369	36905	37767	37802	38453
2007	4	10942	130029	133003	133662	133689	134187
2008	5	75265	228748	245066	248686	248832	251568

(٨) Additive Quotas / Additive Ultimates:

حساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و ($\hat{\alpha}_i^{AD}$):

حيث أن:

$\hat{\gamma}_k^{AD}$: (Additive Quotas) حيث تمثل أنصبة تطور الخسائر التراكمية لطريقة (AD) ويمكن حسابها من المعادلة التالية:

$$\hat{\gamma}_k^{AD}(\pi) := \frac{\sum_{l=0}^{k} \hat{\zeta}_l^{AD}(\pi)}{\sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{AD}(\pi)}$$

$\hat{\alpha}_i^{AD}$: (Additive Ultimates) حيث تمثل الخسائر النهائية المتوقعة لطريقة (AD) ويمكن حسابها من المعادلة التالية:

$$\hat{\alpha}_i^{AD} := \pi_i \sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{AD}$$

جدول رقم (٢٥): يوضح الخسائر الحالية ، وأنصبة تطور الخسائر التراكمية والخسائر النهائية المتوقعة لطريقة (AD) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	π_i	$\hat{\alpha}_i^{AD}(\hat{\gamma}^{AD})$	Development year (k)					
			0	1	2	3	4	5
0	37684	67641						17434
1	18694	33555					29182	
2	41667	74790				32381		
3	30685	55078			36905			
4	23484	42152		130029				
5	128873	231319	75265					
$\hat{\gamma}_k^{AD}$			0.237837	0.901348	0.971891	0.98754	0.98817277	1

وبناءاً على الجدول السابق، يمكن حساب الخسائر التراكمية المتوقعة من المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{AD} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{AD} - \hat{\gamma}_{n-i}^{AD})\hat{\alpha}_i^{AD}$$

جدول رقم (٢٦): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة بمعلومية ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و ($\hat{\alpha}_i^{AD}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	π_i	$\hat{\alpha}_i^{AD}$	Development year (k)					
			0	1	2	3	4	5
0	37684	67641						17434
1	18694	33555					29182	29579
2	41667	74790				32381	32428	33313
3	30685	55078			36905	37787	37802	38483
4	23484	42152		130029	133003	133662	133689	134187
5	128873	231319	75265	228748	245066	248686	248832	251560
$\hat{\gamma}_k^{AD}$			0.237837	0.901348	0.971891	0.98754	0.98817277	1

جدول رقم (٢٧): يوضح (T R) و (F-Y R) باستخدام ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و ($\hat{\alpha}_i^{AD}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	397	397
2	47	932
3	862	1548
4	2974	4158
5	153483	176303
$\sum$	157762	183338

ويمكن إيجاد ($\hat{\alpha}_i^{AD}$) بطريقة أخرى على النحو التالي:

١- يمكن حساب ($\hat{\kappa}^{AD}$): وهى نسبة خسارة (AD) من المعادلة التالية:

$$\hat{\kappa}^{AD} := \frac{\sum_{i=0}^{n} S_{i,n-i}}{\sum_{i=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-i}^{AD} \pi_i}$$

ويتم توضيح ذلك من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (٢٨): يوضح كيفية حساب ($\hat{\kappa}^{AD}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	$S_{i,5-i}$	$\hat{\gamma}_{5-i}^{AD}$	π_i	$\hat{\gamma}_{5-i}^{AD} \pi_i$
0	17434	1	37684	37684
1	29182	0.98817	.18694	18473
2	32381	0.98754	41667	41148
3	36905	0.97189	30685	29822
4	130029	0.90135	23484	21167
5	75265	0.23784	128873	30651
$\sum$	321196			178946

$$\hat{\kappa}^{AD} = \frac{321196}{178946} = 1.794937$$

٢- حساب الخسائر النهائية المتوقعة لسنة الحادث i:

$$\hat{\alpha}_i^{AD} := \pi_i \hat{\kappa}^{AD}$$

ومن المعادلة:

$$\hat{\alpha}_i^{AD} := \pi_i \sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{AD}$$

نستنتج أن:

$$\hat{\kappa}_i^{AD} := \sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{AD}$$

٣- حساب الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (AD) باستخدام المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{AD} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{AD} - \hat{\gamma}_{n-i}^{AD}) \pi_i \hat{\kappa}^{AD}$$

جدول رقم (٢٩): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (AD) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	π_i	$\hat{\alpha}_i^{AD}$	Development year (k)					
			0	1	2	3	4	5
0	37684	67640						17434
1	18694	33555					29182	29579
2	41667	74790				32381	32428	33313
3	30685	55078			36905	37767	37802	38453
4	23484	42152		130029	133003	133662	133689	134187
5	128873	231319	75265	228747	245066	248686	248832	251568
$\hat{\gamma}_k^{AD}$			0.237837	0.901348	0.971891	0.98754	0.98817277	1

جدول رقم (٣٠): يوضح(T R) و (F-Y R) باستخدام طريقة (AD) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	397	397
2	47	932
3	862	1548
4	2974	4158
5	153483	176303
$\sum$	157762	183338

وهي نفس نتائج جدول رقم (٢٠) و جدول رقم (٢٧).

(٩) Prior Ultimate/ Additive Quotas:

يمكن حساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من $(\hat{\gamma}_k^{AD})$ و $(\hat{\alpha}_i)$ من خلال المعادلة التالية:

$$\hat{S}_{i,k} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{AD} - \hat{\gamma}_{n-i}^{AD})\hat{\alpha}_i$$

جدول رقم (٣١): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من $(\hat{\gamma}_k^{AD})$ و $(\hat{\alpha}_i)$ (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	$\hat{\alpha}_i$	Development year (k)					
		0	1	2	3	4	5
0	35800						17434
1	17759					29182	29392
2	39584				32381	32406	32874
3	29151			36905	37361	37380	37724
4	22310		130029	131603	131952	131966	132230
5	122429	75265	156498	165135	167051	167128	168576
$\hat{\gamma}_k^{AD}$		0.237837	0.901348	0.971891	0.98754	0.98817277	1

جدول رقم (٣٢): يوضح (T R) و(F-Y R) باستخدام كلاً من ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و($\hat{\alpha}_i$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	210	210
2	25	493
3	456	819
4	1574	2201
5	81233	93311
$\sum$	83498	97035

(١٠) Cape-Cod Ultimate/ Additive Quotas:

يمكن حساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و ($\hat{\alpha}_i^{CC}$) من خلال المعادلة التالية:

$$\hat{s}_{i,k} = s_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{AD} - \hat{\gamma}_{n-i}^{AD})\hat{\alpha}_i^{CC}$$

جدول رقم (٣٣): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و($\hat{\alpha}_i^{CC}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	π_i	$\hat{\alpha}_i^{CC}$	Development year (k)					
			0	1	2	3	4	5
0	37684	63976						17434
1	18694	31737					29182	29557
2	41667	70738				32381	32426	33262
3	30685	52094			36905	37720	37753	38369
4	23484	39869		130029	132842	133465	133491	133962
5	128873	218789	75265	220434	235868	239292	239430	242018
$\hat{\gamma}_k^{AD}$			0.237837	0.901348	0.971891	0.98754033	0.9881728	1

جدول رقم (٣٤): يوضح (T R) و (F-Y R) باستخدام كلاً من ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و ($\hat{\alpha}_i^{CC}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	375	375
2	45	881
3	815	1464
4	2813	3933
5	145169	166753
Σ	149216	173407

(١١) Additive quotas/ Loss- Development Ultimates:

يمكن حساب قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و ($\hat{\alpha}_i^{LD}$) من خلال المعادلــة التالية:

$$\hat{S}_{i,k}^{LD}(\hat{\gamma}^{AD}) := \hat{\gamma}_k^{AD} \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{AD}}$$

جدول رقم (٣٥): يوضح الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام كلاً من ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و ($\hat{\alpha}_i^{LD}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}^{AD})$	Development year (k)					
		0	1	2	3	4	5
0	17434						17434
1	29531					29182	29531
2	32790				32381	32402	32790
3	37972			36905	37499	37523	37972
4	144261		130029	140206	142463	142554	144261
5	316456	75265	285237	307561	312513	312713	316456
$\hat{\gamma}_k^{AD}$		0.237837	0.901348	0.971891	0.987540	0.988173	1

جدول رقم (٣٦): يوضح(T R) و (F-Y R) باستخدام كلاً من ($\hat{\gamma}_k^{AD}$) و ($\hat{\alpha}_i^{LD}$) (القيمة بالألف جنيه).

Accident year (i)	First-Year Reserve	Total Reserve
0	0	0
1	349	349
2	21	409
3	594	1067
4	10177	14232
5	209972	241191
$\sum$	221113	257248

جدول رقم (٣٧) : يوضح التقديرات الأولية لأنصبة تطور الخسائر التراكمية.

التقديرات الأولية للأنصبة التراكمية	Development year (k)					
	0	1	2	3	4	5
$\hat{\gamma}_k$	0.3356	0.9235	0.9443	0.9526	0.9541	1.0000
$\hat{\gamma}_k^{CL}$	0.1555	0.7858	0.9192	0.9528	0.9541	1.0000
$\hat{\gamma}_k^{AD}$	0.2378	0.9013	0.9719	0.9875	0.9882	1.0000

جدول رقم (٣٨): يوضح التقديرات الأولية للخسائر النهائية المتوقعة للطرق المختلفة (القيمة بالألف جنيه).

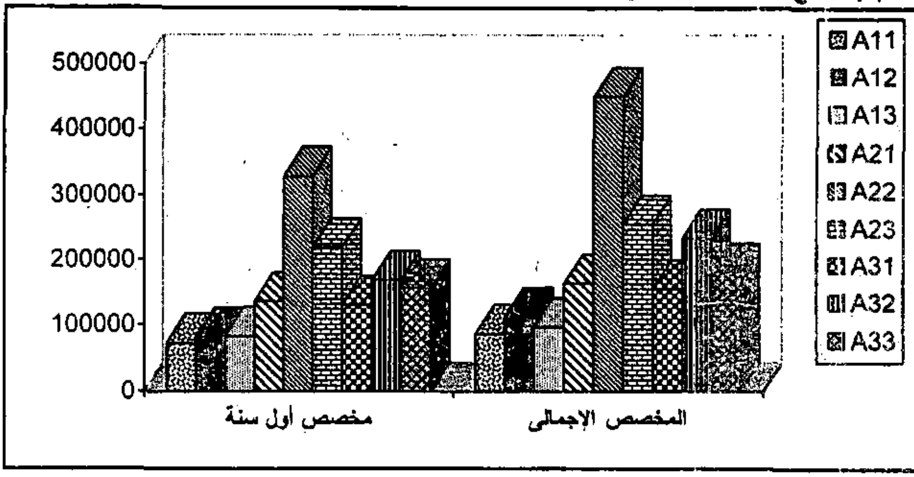
التقديرات الأولية للخسائر النهائية المتوقعة		التقديرات الأولية للأنصبة التراكمية	Accident year (i)					
			0	1	2	3	4	5
A_{11}	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\gamma}_k$	35800	17759	39584	29151	22310	122429
A_{12}	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\gamma}_k^{CL}$	35800	17759	39584	29151	22310	122429
A_{13}	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\gamma}_k^{AD}$	35800	17759	39584	29151	22310	122429
A_{21}	$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma})$	$\hat{\gamma}_k$	17434	30585	33994	39082	140794	224303
A_{22}	$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}^{CL})$	$\hat{\gamma}_k^{CL}$	17434	30586	33986	40149	165482	483970
A_{23}	$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}^{AD})$	$\hat{\gamma}_k^{AD}$	17434	29531	32790	37972	144261	316456
A_{31}	$\hat{\alpha}_i^{CC}(\hat{\gamma})$	$\hat{\gamma}_k$	64002	31750	70767	52115	39885	218876
A_{32}	$\hat{\alpha}_i^{CC}(\hat{\gamma}^{CL})$	$\hat{\gamma}_k^{CL}$	74753	37083	82654	60869	46585	255642
A_{33}	$\hat{\alpha}_i^{CC}(\hat{\gamma}^{AD})$	$\hat{\gamma}_k^{AD}$	67640	33555	74790	55078	42152	231319

جدول رقم (٣٩): يوضح قيمة المخصص الإجمالي (T R) ومخصص أول سنة ميلادية غير مشـاهدة (F-Y R)

(القيمة بالألف جنيه).

التقديرات الأولية للخسائر النهائية المتوقعة		التقديرات الأولية للأنصبة التراكمية	مخصص أول سنة ميلادية غير مشاهدة	المخصص الإجمالي	الطريقة
A_{11}	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\gamma}_k$	73567	87371	B-F
A_{12}	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\gamma}_k^{CL}$	81984	113209	
A_{13}	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\gamma}_k^{AD}$	83498	97035	
A_{21}	$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma})$	$\hat{\gamma}_k$	136590	164996	LD
A_{22}	$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}^{CL})$	$\hat{\gamma}_k^{CL}$	329898	450411	CL
A_{23}	$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}^{AD})$	$\hat{\gamma}_k^{AD}$	221113	257248	
A_{31}	$\hat{\alpha}_i^{CC}(\hat{\gamma})$	$\hat{\gamma}_k$	131522	156198	Cape-Cod
A_{32}	$\hat{\alpha}_i^{CC}(\hat{\gamma}^{CL})$	$\hat{\gamma}_k^{CL}$	171188	236289	
A_{33}	$\hat{\alpha}_i^{CC}(\hat{\gamma}^{AD})$	$\hat{\gamma}_k^{AD}$	157762	183338	Additive
Minimum			73567	87371	
Maximum			329898	450411	

شكل (١) يوضح المخصص الإجمالي ومخصص أول سنة ميلادية غير مشاهدة:



النتائج

لقد أسفرت الدراسة عن النتائج التالية:

١- يعتبر نموذج (Bornhuetter-Ferguson) قاعدة عامة لمقارنة مجموعة من الطرق الرياضية المستخدمة في حساب مخصص الخسارة والتي تعتمد على (run-off triangle)، وذلك في ضوء التقديرات الأولية للخسائر النهائية المتوقعة والتقديرات الأولية لأنصبة تطور الخسائر التراكمية، وتعطي (predictors) الخسائر النهائية لهذه الطرق شكل (*Bornhuetter*-Ferguson predictors)، ومن خلال هذه الطرق يتم تقييم ومقارنة (predictors) الناتجة من أجل التوصل إلى أفضل (predictors) وتحديد مدى التنبؤ بالاعتماد على مصادر المعلومات المختلفة ولمقارنة المحفظة التأمينية تحت مجموعة من اعتبارات السوق.

٢- يتم تقدير مخصص الخسارة من خلال التنبؤ بالخسائر التراكمية النهائية ومخصصات سنة الحادث.

٣- يوجد تفاوت ملحوظ بين التقديرات الأولية لأنصبة تطور الخسائر التراكمية.

٤- التقديرات الأولية للخسائر النهائية المتوقعة كانت متماثلة في الطرق الآتية:

- (Bornhuetter-Ferguson)
- (Chain-Ladder Quotas / Prior Ultimates)
- (Prior Ultimate/ Additive Quotas)

٥- قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-L) بمعلومية عوامل التطور ($\hat{\varphi}_k^{CL}$) تماثل قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-L) بمعلومية أنصبة التطور ($\hat{\gamma}_k^{CL}$).

٦- بالرغم من استخدام قاعدة واحدة في حساب مخصص الخسارة وهي قاعدة (B-F)، إلا انه مع تغير أنصبة تطور الخسائر التراكمية أو الخسائر النهائية المتوقعة أو الاثنين معاً نحصل على طريقة جديدة مشتقة من هذه القاعدة، تعطي قيمة مختلفة لمخصص الخسارة.

٧- أنسب طريقة هي (loss-development *ultimates*/ additive quotas).

المراجع:

Benktander,G. (1976), "An Approach to Credibility in Calculating IBNR for Casualty Excess Reinsurance" Actuarial Review 3:2, p. 7.

Bornhuetter, R. L., and R. E. Ferguson (1972), "The Actuary and IBNR" Proceedings of the Casualty Actuarial Society 59, pp. 181-195.

Chaoxiong (Michelle) Xia (2007), "A Bayesian Mixture model for Zeros and Negative in Stochastic Reserving", thesis of master degree, University of Calgary.

Colin M. Ramsay (2005), "A new method of estimating loss reserves" Proceedings of the Casualty Actuarial Society , Volume XCII, Numbers 176-177, pp. 462-485.

Daniel Cheung (1997),"Estimating IBNR reserves with robust statistics", A Dissertation of Ph.D, Western Michigan University.

Foundations of Casualty Actuarial Science (2001), Fourth Edition, Casualty Actuarial Society, Chapter 5, pp. 197-280.

Hess, Klaus Th. and Schmidt, Klaus D. (2002), "A Comparison of models for the chain-ladder method", Insurance: Mathematics and Economics, 31, 351-364.

Hovinen, E. (1981), "Additive and Continuous IBNR" paper presented at the International ASTIN Colloquium, Loen, Norway.

Klaus D. Schmidt (2006), "Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey" Casualty Loss Reserve Seminar, Atlanta, September 12.

Klaus D. Schmidt and Mathias Zocher (2008), "Bornhuetter–Ferguson as a General Principle of Loss Reserving" ASTIN Conference, Manchester, July 14–16.

Klaus D. Schmidt and Mathias Zocher (2008), "The Bornhuetter–Ferguson Principle" CAS Spring Meeting, Québec, June 17.

Kloek T. (1998), "Loss development forecasting models: an econometrician's view", Insurance: Mathematics and Economics, v. 23, pp. 251-261.

Lorenz, Holger, and Klaus D. Schmidt (1999), "Grossing-up, chain ladder and marginal-sum estimation", Blatter DGVM, Vol. 24, 195-200.

Mack T. (2000), "Credible Claims Reserves-The Benktander Methods", ASTIN Bulletin 30, pp.333-347.

Rafat A. Ibrahim and Osama H. Mahmoud (2006), "A Comparison of Statistical Models that Reproduce Loss Reserve Estimates", Journal of Management and Accounting, Cairo university, pp 205-237.

Robert L. Brown (2001), " Introduction to ratemaking and loss reserving for property and casualty insurance", Second Edition, ACTEX publication, Inc., pp 109-150.

Schmidt K. D. and Mathias Zocher (2008), "The Bornhuetter-Ferguson Principle" Casualty Actuarial Society, Variance: Advancing the Science of Risk– Volume 2, Issue 1, 85-110.

Schmidt Klaus D. (2008) "Bornhuetter-Ferguson as a General Principle of Loss Reserving", ASTIN Bulletin, July 2008.

Schmidt, K. D. (2006), "Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles – A Unifying Survey", Casualty Actuarial Society Forum, PP. 269-317.

Statement of Principles Regarding Property and Casualty Loss and Loss Adjustment Expense reserve (1988), (CAS), PP10-16, Appendix 2.

Verrall R. J. (1989)," A state space representation of chain ladder linear model", Journal of institute of Actuaries, 116, 589-610.

Verrall R. J. (1994), " Statistical Methods for the Chain Ladder Technique", Casualty Actuarial Society Forum, pp 393-446.

Zhongxian Han and Wu-Chyuan Gau (2008), "Estimation of loss reserves with lognormal development factors" Insurance: Mathematics and Economics, 42, 389-395.