# مراقبة الجودة المتعددة
# مع التطبيق على صناعة الألبان


دكتورة أنجة محمد راغب كمال الصايغ

كلية التجارة جامعة عين شمس


عندما يكون لدينا عدد ( P ) من مواصفات مرتبطة لتصنيع منتج عند بدء إنتاجه لاول مرة ونريد مراقبة جودة هذه المواصفات فى آن واحد ؛ فغالبا ماتكون البيانات محل الدراسة عبارة عن مشاهدات فردية جمعت من أول انتاج . ويجب اختبار بيانات العملية الإنتاجية وتحديد الأسباب الخاصة للاختلافات بين المفردات المنتجة ؛ وذلك بغرض إقامة أسس المراقبة للحصول على عينة خالية من الاختلافات اللاعشوا ئية حتى يمكن استخدامها كأساس فى تحديد حدود المراقبة لمشاهدات المستقبل بما يضمن بقاء العملية الإنتاجية تحت الضبط أى مراقبة إحصائياً .

ويعتبر إحصاء $T^2$( Hotelling 's $T^2$ statistic ) أحد الطرق الشائعة الاستخدام فى إنشاء خرائط المراقبة للمواصفات المتعددة . وإذا كانت العملية الإنتاجية فى مرحلة البدء ؛ بحيث تكون البيانات المتاحة عبارة عن مشاهدات أولية فردية فإنه يمكن استخدام التوزيع التقريبي ( F ) ، وكذلك توزيع ( $\chi^2$ ) لإنشاء حدود مراقبة لمواصفات متعددة والتى تكون حدودها غير قابلة للتغيير فى مرحلة البدء . وفى الوقت الحالى استخدم أسلوب فعلى جديد لإنشاء حدود مراقبة لمواصفات متعددة لمنتج فى مرحلة البدء معتمدا أساسا على توزيع ( Beta ) . وهذا البحث يتناول مثالا عن الصناعات الغذائية – صناعة الألبان – وتطبيق هذا الأسلوب الفعلى وتوضيح أن التحسين فى النتائج الناتجة من استخدام هذا الأسلوب يعتبر افضل من أسلوب التقريب ؛ وخاصة إذا كان عدد العينات المستخدمة فى الفحص صغيرا.

# المقدمة

يمكن قياس جودة الوحدات المنتجة لأى عملية انتاجية بتحديد مستوى مشترك لجميع المواصفات المختلفة المرتبطة لهذه الوحدات. ومثال ذلك عملية صناعة النسيج وتعتبر دالة فى قوة الشد للفتلة من نسيج معين، وكذلك درجة ثبات الصياغة المستخدمة، وغيرها من المواصفات، وأيضاً صناعة الأثاث تعتمد على درجة صلابة الأخشاب المستخدمة. وكذلك قوة الثنى لألواح الخشب وغيرها من المواصفات. ونحتاج إلى مراقبة كل صفة من مواصفات كل صناعة بدقة وعناية. ولقد أرجع (1974 Hawkins) عملية التغيرات الكميائية التى تطرأ على القشرة الأرضية عند استخراج الفحم إلى (14) متغيرا مرتبطة جميعها ومثل هذه الحالة تمكننا خرائط المراقبة الأحادية المنفصلة لكل من المواصفات من اكتشاف التغيرات فى المتغيرات الكامنة لهذه العملية الإنتاجية. ونظرا لأن هذه المواصفات مرتبطة ومتبادلة فإن خرائط مراقبة الجودة المتعددة تكون أفضل.

ويعتبر (1974 Hotelling) من أوائل الذين تداركوا استخدام خرائط المراقبة الأحادية المنفصلة للمتغيرات المرتبطة واستخدم خرائط المراقبة المتعددة لمراقبة جودة عمل الطائرات التى تستخدم فى القصف الجوى أثناء الحرب العالمية الثانية . ولقد قدم (Hotelling) مفاهيم عديدة فى مراقبة الجودة المتعددة أيضا قدم (1985-1982 Alt) مجموعة ممتازة من المقالات ناقش فيها مراقبة الجودةالمتعددة ، وكذلك ($1980$ Jackson, $1981_a$, $1981_b$ , 1985) وتحدث أيضا (1989 Ryan) عن الطرق الإحصائية لتحسين الجودة ، كما تعرض ( 1991 Mantogomery ) لمراقبة الجودة المتعددة مع بعض الأمثلة التطبيقية لها . ولقد استخدم ( 1947 Hotelling ) توزيعه المعروف ( $T^2$ ) فى رسم قيم خرائط المراقبة المتعددة بيانيا عندما تكون المواصفات تحت الدراسة مرتبطة . ويجب أن يكون واضحا أن توزيع ( $T^2$ ) يعتبر نسخة مطابقة من توزيع ( T ) .

ولقد أوضح ( 1985 Alt ) أنه يتم إنشاء خرائط مراقبة أو ضبط الجودة لمهمتين أساسيتين.

## المهمة الأولى

التحقق من أن المنتج الجديد فى بدء إنتاجه فى حالة ضبط إحصائى ويتم هذا عن طريق أخذ مشاهدات أولية من المنتج الجديد واعتبارها عينة ممثلة لوحدات المنتج تؤخذ فى فترة زمنية محددة وإخضاعها لعدة اختبارات تمكننا من اعتبار هذه المشاهدات بمثابة عينة نموذجية أو استرشادية فى حالة ضبط إحصائى واستخدام هذه المجموعة من المشاهدات فى إنشاء حدود مراقبة لغرض التحكم أو الضبط لهذه العملية الإنتاجية فى المستقبل .

## المهمة الثانية

اعتبار خرائط المراقبة بمثابة تصميم يستخدم للحفاظ على المراقبة أو الضبط أو التحكم الإحصائى عن طريق اكتشاف أى انحراف عن العملية الإنتاجية المعيارية فى المجموعات التى يتم إختيارها فى المستقبل حتى يمكن الحكم على ان العملية الإنتاجية فى حالة ضبط .

ويستخدم غالبا الإحصاء ( $T^2$ ) المتعدد كخرائط إحصائية لتحقيق المهمة الأولى عندما تكون أحجام العينات المسحوبة أكبر من وحدة واحدة . ولتحقيق المهمة الثانيةفإن حدود المراقبة تحدد بإستخدام حقيقة أن الإحصاء ($T^2$) فى أوقات الثبات يتبع توزيع (F) الفعلى وفى مرحل البداية للعملية الإنتاجية مع بيانات أولية فردية . ومع ذلك إذا حسبت حدود المراقبة باستخدام تقريب توزيع ( F ) أو توزيع ( $\chi^2$ ) فإن درجة الخطأ المصاحبة لهذا التقريب تكون غير معلومة.

ولقد عالج كل من ( 1992 Mason, Young , Tracy) هذه المشكلة وقدموا الطريقة الدقيقة المضبوطة لإنشاء خرائط مراقبة متعددة المواصفات تستخدم عندما تكون البيانات التى جمعت فردية فى مرحلة بدء العملية الإنتاجية ، وقاموا بتطبيقها على بيانات فردية ؛ أى أن حجم العينة مفردة واحدة ، وجمعت هذه البيانات فى مرحلة البدء لعملية صناعية كميائية لثلاث مواصفات هى درجة التركيز ، درجة الحرارة ، وكذلك درجة

التلوث . وسوف نتناول عرض هذه الطريقة بالتفصيل وبأستخدام نفس الرموز ثم نتبعها بمثال تطبيقى .

## تصميم الضبط فى مرحلة البدء للانتاج

نفترض وجود عدد ( p ) من المواصفات (المتغيرات) المرتبطة ومقاسة آنيا فى وقت واحد وتحتاج الى عملية ضبط او مراقبة. نفترض ايضا ان هذه المواصفات تتبع التوزيع الطبيعى المتعدد ذو (p) من الابعاد وان متجه الوسط الحسابى لهذا التوزيع

$$\mu` = ( \mu_1 , \mu_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \mu p )$$

حيث تعبر( $\mu_i$ ) عن الوسط الحسابى للصفة أو المتغير ( i )

كذلك مصفوفة التغاير لهذا التوزيع هى ( $\sum$ ) من الرتبة ( $p \times p$ ) وتحتوى علي التباينات والتغايرات لعدد ( p ) من المواصفات .

والتوزيع الطبيعى المتعدد ذو (p) من الأبعاد مماثل او مناظر للتوزيع الطبيعى الأحادى المفترض لكل صفة على حدة. ونظرا لأن الإنتاج فى مرحلة البدء وأن العملية الإنتاجية ليست فى حالة ضبط ؛ نجد أنه لايوجد توزيع واضح وثابت للبيانات؛ وعليه فإن افتراض أن المواصفات محل الدراسة تتبع التوزيع الطبيعى المتعدد وضع فقط لإنشاء حدود الضبط. وبعد تثبيت عملية الضبط فيفترض أن البيانات منطقيا ستكون قد وزعت طبيعيا. والنتائج تعتمد هنا على صحة هذا الافتراض كما فى حالة حدود المراقبة أو الضبط العادية لخرائط المراقبة الأحادية للمفردات التى تحتاج أيضا إلى افتراض توزيعها طبيعيا، كما يمكن اختبار افتراض أن البيانات موزعة توزيعا طبيعيا متعددا باستخدام اختبارات جودة التوفيق الطبيعى المتعدد ويمكن الرجوع فى هذا إلى (Gnanadesikan 1977).

يفترض أيضا أن العينة المتاحة تحتوى على ( m ) مجموعة من بيانات سابقة لتقدير المعالم ( $\mu$ , $\sum$ ) وفى بعض الحالات غير جائز إمكانية الحصول على مجموعات ذات حجم أكبر من مفردة واحدة . ويحدث ذلك عندما يكون معدل سرعة الإنتاج بطيء ؛ مما يؤدى إلى عدم إمكانية جعل أحجام العينات أكبر من وحدة واحدة ، أو مع نوعية

الإنتاج الذى إذا أعيدت القياسات للوحدات المختارة فإنها تختلف من فترة زمنية لأُخرى أو بسبب أخطاء التحليل كما يحدث فى العمليات الكميائية .

وإذا إفترضنا أن المشاهد الفردية ( $i$ ) لعدد ( $p$ )من المواصفات فى العينة محل الضبط فإن المتجه الذى يمثلها يمكن التعبير عنه كالآتى :

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ip} \end{bmatrix}$$

ويكون قيمة الوسط الحسابى المقدر كالآتى :

$$\bar{x}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

وتعبر عناصر هذا المتجه عن الأوساط الحسابية لكل صفة حيث

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

ويمكن التعبير عن مصفوفة التغاير المقدرة كالآتى :

$$S_m = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x}_m)(x_i - \bar{x}_m)'$$

ولأنشاء خرائط المراقبة أو الضبط المتعددة باستخدام إحصاء ( $T^2$ ) ؛ فإن الإحصاء البيانى لكل وحدة مشاهدة $x_i$ هو :

$$Q_i = ( x_i - \bar{x}_m )' S_m^{-1} ( x_i - \bar{x}_m ) \qquad (1)$$

والتوزيع ( $Q_i$ ) معروف على نحو غير متسع وبالتالى فإن غالبية خبراء خرائط المراقبة المتعددة يقربون هذا التوزيع إلى توزيع ( F ) وتوزيع ( $\chi^2$ ) لغرض الحصول على حدود خرائط المراقبة والضبط . ويمكن الرجوع فى ذلك إلى ( Jackson 1985 ) وكذلك (Ryan 1989) .

ولقد أوضح ( Seber 1984 ) أن الإحصاء ( $Q_i$ ) قد وزع كمتغير ( $\chi^2$ ) مع درجات حرية ( p ) . وفى هذه الحالة فإن الحد الأدنى للمراقبة أو الضبط يكون :

$$LCL = \chi^2 ( 1 - \frac{\alpha}{2} ; p ) \qquad (2)$$

وكذلك يكون الحد الأعلى للمراقبة أو الضبط :

$$UCL = \chi^2 ( \frac{\alpha}{2} ; p ) \qquad (3)$$

حيث تعبر [ $\chi^2 ( \alpha ; p )$ ] عن النسبة ( $1 - \alpha$ ) لتوزيع ( $\chi^2$ ) بدرجات حرية ( p ) .

كذلك أوضح ( Seber 1984 ) فى نظريته أنه بفرض أن المشاهدة ( $x_i$ ) مستقلة عن كلا من ( $\bar{x}_m$ ) وكذلك ( $S_m$ ) . فى هذه الحالة فإن الإحصاء ( $Q_i$ ) لا يتغير مع الزمن ويتبع توزيع ( F ) بدرجات حرية بسط ( p ) ومقام ( m - p ) وسوف نستعرض هذه النظرية بالتفصيل :

**نظرية :**

نعلم أن :

$$T^2 = m\, y`\, w^{-1}\, y$$

$$y \sim \mu_d ( o , \sum )$$

حيث :

$$w \sim w_d ( m , \sum )$$

وكذلك ( $w$ , $y$ ) مستقلين إحصائياً

وتعبر ( $N_d$ ) عن التوزيع الطبيعى المتعدد له ( d ) من الأبعاد كما تعبر ($w_d$) عن توزيع ويشارت المتعدد له ( d ) من الأبعاد وعلى ذلك فإن :

$$\frac{m - d + 1}{d} \frac{T^2}{m} \sim F ( d , m - d + 1 )$$

وإذا افترضنا أن مجموعة من المشاهدات الأولية .

$$x_1 , x_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots , x_m$$

وكذلك المشاهدة ( $x_f$ ) تمثل مشاهدة فى المستقبل يراد التأكد من ضبطها ؛ حيث تعبر ( $x_i$ ) عن متجه من المشاهدات فى ( p ) من المتغيرات وبافتراض أن :

$$x_i \sim N_p ( \mu , \sum )$$

$$\therefore\ \bar{x}_m \sim N_p ( \mu , \frac{\sum}{m} )$$

وكذلك :

$$( m - 1 ) S_m \sim W_p ( m - 1 , \sum )$$

وإذا كانت كل من ( $S_m$ , $\bar{x}_m$ ) قد تم إيجادها باستخدام مشاهدات تم الحصول عليها فى مرحلة بدء الإنتاج وكذلك ( $x_f$ ) تعبر عن مشاهدة مستقبلية ؛ فإنه يمكن استنتاج

أن كل من $( S_m , \bar{x}_m )$ وكذلك $( x_f )$ مستقلين وعليه فإن :

$$x_f - \bar{x}_m \sim N_p\left[ 0 , \left( \frac{m+1}{m} \right) \Sigma \right]$$

وبالتالى فإن :

$$\sqrt{\frac{m}{m+1}} ( x_f - \bar{x}_m ) \sim N_p ( 0 , \Sigma )$$

وإذا عرف الإحصاء $( T^2 )$ كالآتى :

$$T^2 = \left( \frac{m}{m+1} \right) ( x_f - \bar{x}_m )' S_m^{-1} ( x_f - \bar{x}_m )$$

$$\therefore \frac{m-p}{m} \frac{T^2}{m-1} \sim F ( p , m-1-p+1 )$$

وهذه النتيجة تقود إلى الآتى :

$$\frac{m-p}{p(m-1)} \frac{m}{m+1} ( x_f - \bar{x}_m )' S_m^{-1} ( x_f - \bar{x}_m ) \sim F ( p , m-p )$$

وبصورة أخرى نجد أن :

$$( x_f - \bar{x}_m )' S_m^{-1} ( x_f - \bar{x}_m ) \sim \frac{p(m-1)(m+1)}{m(m-p)} F ( p , m-p )$$

وفى هذه الحالة فإن الحد الأدنى للمراقبة يكون :

$$LCL = \frac{p(m-1)(m+1)}{m(m-p)} F\left( 1 - \frac{\alpha}{2} ; p , m-p \right)$$

ويكون الحد الأعلى للمراقبة :

$$UCL = \frac{p(m-1)(m+1)}{m(m-p)} F\left( \frac{\alpha}{2} ; p , m-p \right)$$

حيث تمثل [ F ( α , p , m - p ) ] عن النسبة ( 1 - α ) للتوزيع ( F ) مع درجات حرية ( p ) للبسط ، ( m - p ) للمقام .

والشرط اللازم والضرورى هنا أن العملية الإنتاجية تكون فى مرحلة البدء .

ولقد قام كل من ( Gnanadesikan , Kettenring 1972 ) باستخدام نتائج (Wilks 1962) لإيضاح أن الإحصاء ( $Q_i$ ) له توزيع ( Beta ) كالآتى :

$$Q_i \sim \frac{(m-1)^2}{m} \beta\left(\frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}\right) \qquad (4)$$

وهذا التوزيع الأخير يكون صحيحاً فقط تحت شرط أن قيم ( $x_i$ ) الفردية والأولية قد جمعت فى مرحلة البداية للعملية الإنتاجية كما سبق أوضحنا . أى أن هذه القيم استخدمت لحساب حدود الضبط أو المراقبة واختبرت لمعرفة هل المشاهدات تحت المراقبة أم لا ، ويكون الحد الأدنى للمراقبة هو :

$$LCL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta\left(1 - \frac{\alpha}{2}; \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}\right)$$

وكذلك الحد الأعلى للمراقبة هو :

$$UCL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}\right)$$

حيث يعبر $\left[\beta\left(\alpha; \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}\right)\right]$ عن النسبة ( 1 - α ) لتوزيع ( Beta ) ذو المعالم $\left[\frac{m-p-1}{2}, \frac{p}{2}\right]$ .

وباستخدام العلاقة بين المتغيرات التى تتبع توزيع ( Beta ، F ) ؛ وهى :

$$\frac{\left(\frac{p}{m-p-1}\right) F(\alpha; p, m-p-1)}{1 + \left(\frac{p}{m-p-1}\right) F(\alpha; p, m-p-1)} = \beta\left(\alpha; \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}\right)$$

وباستخدام هذه العلاقة فإن حدود المراقبة السابقة يمكن التعبير عنها باستخدام توزيع (F) ويصبح الحد الأدنى :

$$LCL = \frac{(m-1)^2}{m} \frac{\left(\frac{p}{m-p-1}\right) F\left(1-\frac{\alpha}{2}; p, m-p-1\right)}{1+\left(\frac{p}{m-p-1}\right) F\left(1-\frac{\alpha}{2}; p, m-p-1\right)} \quad (5)$$

ويصبح الحد الأعلى :

$$UCL = \frac{(m-1)^2}{m} \frac{\left(\frac{p}{m-p-1}\right) F\left(\frac{\alpha}{2}; p, m-p-1\right)}{1+\left(\frac{p}{m-p-1}\right) F\left(\frac{\alpha}{2}; p, m-p-1\right)} \quad (6)$$

من الواضح أنه يمكن استخدام ( 5 )، ( 6 ) عندما يتعذر وجود جداول ( Beta ) وبالنسبة للخط المتوسط المناسب لمثل هذا النوع من خرائط المراقبة المتعددة يمكن الحصول عليه من معادلة ( 6 ) عند ( $\alpha = 1$ ) .

**المثال التطبيقي :**

يعبر جدول ( ١ ) عن بيانات مأخوذة في مرحلة البداية لعملية صناعية غذائية ، هي صناعة الألبان ومثالنا هذا يتعامل مع ( 7 ) متغيرات مقاسة في وقت واحد لعبوة صغيرة من اللبن مقدارها ( 50 / ml ) ، وهذه المتغيرات هي : مقدار السعرات الحرارية ( $x_1$ ) ، المواد البروتينية ومقاسه بالجم ( $x_2$ ) ، المواد الدهنية ومقاسه بالجم ( $x_3$ ) والمواد الكربوهيدراتية ومقاسه بالجم ( $x_4$ ) ، وفيتامين ( A ) ومقاس بالميكروجرام ( $x_5$ )، والكالسيوم ومقاس بالمليجرام ( $x_6$ ) ، وأخيراً الفوسفور ومقاسا بالمليجرام ($x_7$).

والعينة الممثلة هنا لأول عملية إنتاج تحتوى على ( 18 ) عبوة صغيرة ذات حجم (50 / ml) إذن في مثالنا هذا نجد أن $m = 18$ وكذلك $p = 7$

جدول ( ١ ) بيانات العملية الصناعية الغذائية

| Data | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 32.90 | 1.79 | 1.53 | 2.84 | 21.50 | 51.20 | 49.50 |
| 2 | 32.80 | 1.78 | 1.52 | 2.94 | 20.00 | 53.00 | 48.50 |
| 3 | 32.30 | 1.77 | 1.61 | 2.84 | 20.90 | 51.80 | 50.20 |
| 4 | 31.60 | 1.80 | 1.49 | 2.87 | 21.10 | 53.65 | 50.10 |
| 5 | 30.50 | 1.76 | 1.54 | 2.93 | 20.70 | 52.28 | 49.60 |
| 6 | 32.70 | 1.72 | 1.52 | 2.92 | 19.90 | 50.50 | 49.80 |
| 7 | 32.30 | 1.71 | 1.58 | 2.85 | 19.85 | 50.70 | 48.30 |
| 8 | 33.10 | 1.79 | 1.54 | 2.83 | 20.00 | 52.70 | 48.20 |
| 9 | 33.30 | 1.78 | 1.58 | 2.95 | 21.60 | 51.60 | 48.50 |
| 10 | 32.70 | 1.77 | 1.48 | 2.98 | 20.70 | 51.35 | 49.10 |
| 11 | 31.90 | 1.74 | 1.59 | 2.78 | 21.30 | 51.50 | 49.30 |
| 12 | 32.40 | 1.78 | 1.54 | 2.85 | 20.20 | 52.80 | 50.20 |
| 13 | 32.30 | 1.69 | 1.58 | 2.93 | 20.90 | 52.75 | 49.50 |
| 14 | 32.70 | 1.68 | 1.51 | 2.86 | 19.50 | 51.25 | 48.00 |
| 15 | 31.10 | 1.72 | 1.59 | 2.95 | 19.40 | 51.25 | 48.20 |
| 16 | 32.90 | 1.74 | 1.52 | 2.95 | 19.60 | 52.00 | 48.70 |
| 17 | 33.20 | 1.76 | 1.57 | 2.96 | 20.20 | 52.35 | 48.90 |
| 18 | 33.30 | 1.72 | 1.60 | 2.97 | 21.65 | 53.12 | 47.40 |

وباستخدام بيانات الجدول السابق نجد أن قيمة المتوسطات للعينة هو :

$$\bar{x}_{18} = \begin{bmatrix} 32.50 \\ 1.75 \\ 1.55 \\ 2.90 \\ 20.50 \\ 52.00 \\ 49.00 \end{bmatrix}$$

وكذلك مصفوفة التغاير للعينة هى :

$$S_{18} = \begin{bmatrix} 0.4780 & 0.0002 & 0.0016 & 0.0088 & 0.0259 & -0.0408 & -0.2759 \\ 0.0002 & 0.0010 & -0.0004 & -0.0003 & 0.0113 & 0.0084 & 0.0115 \\ 0.0016 & -0.0004 & 0.0010 & -0.0002 & 0.0071 & -0.0026 & -0.0056 \\ 0.0088 & -0.0003 & -0.0002 & 0.0030 & -0.0034 & 0.0039 & -0.0152 \\ 0.0259 & 0.0113 & 0.0071 & -0.0034 & 0.6890 & 0.0735 & 0.1368 \\ -0.0408 & 0.0084 & -0.0026 & 0.0039 & 0.0735 & 0.5700 & 0.0580 \\ -0.2759 & 0.0115 & -0.0056 & -0.0152 & 0.1368 & 0.0580 & 0.6840 \end{bmatrix}$$

وتعبر المصفوفة ( $R_{18}$ ) عن مصفوفة الارتباط للعينة كالآتى :

$$R_{18} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0091 & 0.0732 & 0.2324 & 0.0451 & -0.0782 & -0.4825 \\ 0.0091 & 1.0000 & -0.4000 & -0.1732 & 0.4305 & 0.3518 & 0.4397 \\ 0.0732 & -0.4000 & 1.0000 & -0.1155 & 0.2705 & -0.1089 & -0.2141 \\ 0.2324 & -0.1732 & -0.1155 & 1.0000 & -0.0748 & 0.0943 & -0.3355 \\ 0.0451 & 0.4305 & 0.2705 & -0.0748 & 1.0000 & 0.1173 & 0.1993 \\ -0.0782 & 0.3518 & -0.1089 & 0.0943 & 0.1173 & 1.0000 & 0.0929 \\ -0.4825 & 0.4397 & -0.2141 & -0.3355 & 0.1993 & 0.0929 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

ويمثل كل عنصر من عناصر المصفوفة ( $R_{18}$ ) عن معامل الارتباط بين ( $x_j$ & $x_i$ ) ويمكن استنتاج معاملات الارتباط هذه باستخدام العناصر المكونة لمصفوفة التغاير $S_{18}$ وذلك باستخدام العلاقة :

$$r_{ij} = \frac{Sij}{\sqrt{S_{ii}}\ \sqrt{S_{jj}}}$$

حيث تعبر :

$r_{ij}$ عن معامل الارتباط فى الصف ( i ) والعمود ( j ) فى مصفوفة الارتباط .

$S_{ij}$ عن العنصر الذى يوجد فى الصف ( i ) والعمود ( j ) فى مصفوفة التغاير .

والجدير بالملاحظة فى مصفوفة معاملات الارتباط أن العناصر التى على جانبى القطر الرئيسى توضح أن معاملات الارتباط بين الـ ( 7 ) متغيرات توضح أن هذه المتغيرات مرتبطة فيما بينها مما يدعم ضرورة استخدام نظام مراقبة الجودة المتعددة .

ويمكن الحصول على حدود المراقبة المتعددة باستخدام معادلة ( 5 ) للحد الأدنى وكذلك معادلة ( 6 ) لإيجاد الحد الأعلى كالآتى :

$$LCL = \frac{(18-1)^2}{18}\ \frac{\left(\frac{7}{18-7-1}\right)\times 0.0229}{1+\left[\left(\frac{7}{18-7-1}\right)\times 0.0229\right]} = 0.2528$$

وكذلك

$$UCL = \frac{(18-1)^2}{18}\ \frac{\left(\frac{7}{18-7-1}\right)\times 6.30}{1+\left[\left(\frac{7}{18-7-1}\right)\times 6.30\right]} = 13.0878$$

وقد تم إيجاد الحدود السابقة عند $\alpha = 0.01$

وباستخدام معادلة ( 1 ) يمكن إيجاد المقدار الإحصائى ( $Q_i$ ) كالآتى :

$$Q_i = (x_i - \bar{x}_m)'\ S_m^{-1}\ (x_i - \bar{x}_m) \qquad (7)$$

ويعبر المقدار الإحصائي ( $Q_i$ ) عن القيمة الإحصائية التى سوف تقارن مع حدود

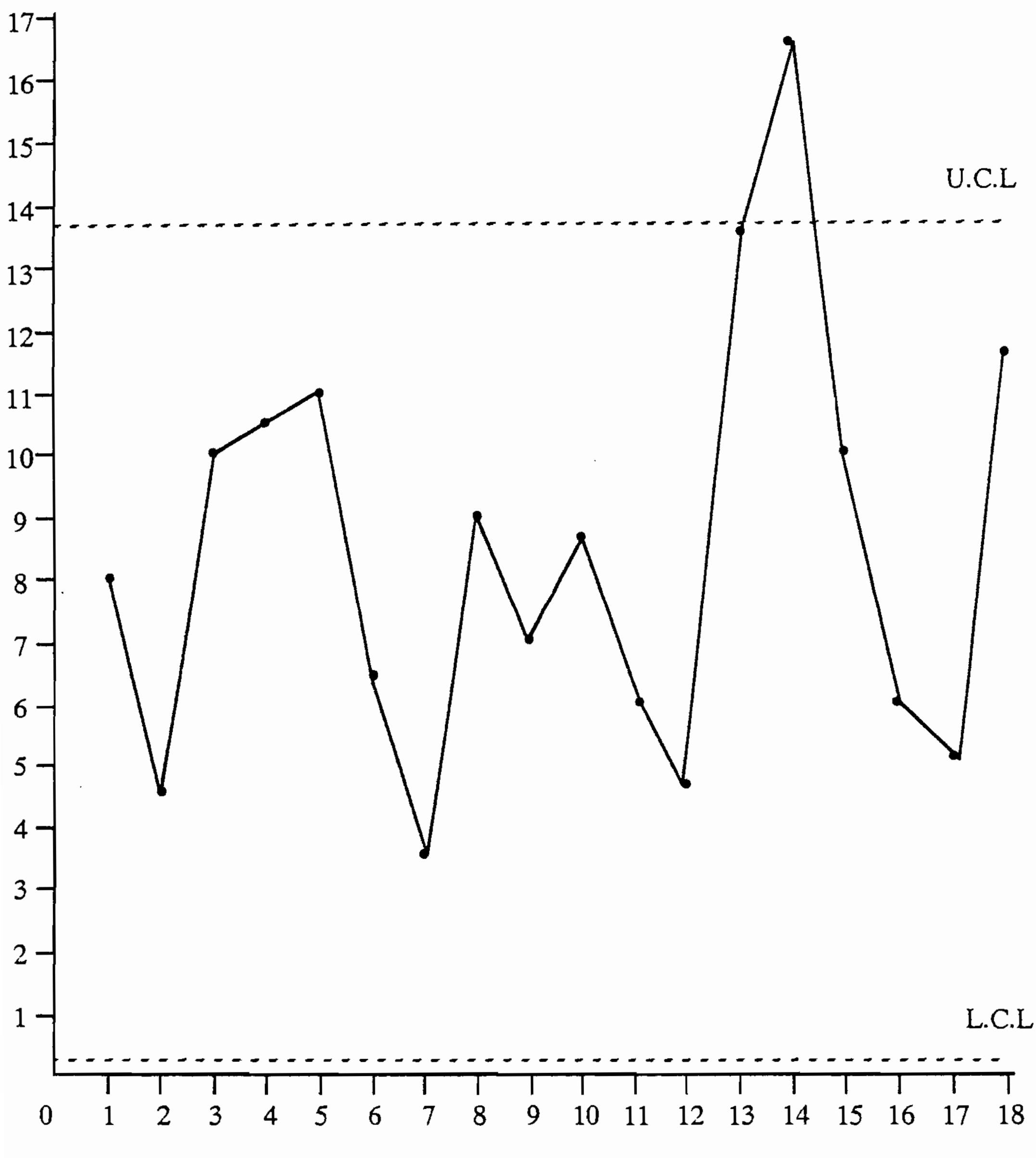
المراقبة التى تم الحصول عليها سابقاً فى خرائط المراقبة .

ويمكن التعبير عن المقدار ( $Q_i$ ) بالمتجه الآتى :

$$(Q_i) = \begin{bmatrix} 7.9208 \\ 4.5140 \\ 9.9940 \\ 10.4913 \\ 11.2212 \\ 6.4790 \\ 3.8007 \\ 9.3506 \\ 7.5551 \\ 9.1880 \\ 6.4345 \\ 4.8513 \\ 13.0253 \\ 16.6263 \\ 10.3625 \\ 6.2449 \\ 5.3126 \\ 11.7406 \end{bmatrix}$$

والشكل رقم ( ١ ) التالى يوضح خريطة المراقبة المتعددة الخاصة بالعملية الصناعية محل الدراسة . ويتضح أن المشاهدة رقم ( 14 ) تقع خارج حدود المراقبة السابق تحديدها وبفحص المشاهدة رقم ( 14 ) اتضح أن هناك مستوى منخفض غير عادى بالنسبة إلى

ڤيتامين A ( $x_5$ ) ، والكالسيوم A ( $x_6$ ) وكذلك الفوسفور ( $x_7$ ) وبناء على ذلك استبعدت هذه المشاهدة من بيانات الدراسة أى من العينة ، وفى نفس الوقت فإن الأمر يتطلب دراسة الأسباب التى أدت إلى انخفاض مستوى المتغيرات المعنية كل على حدة ، وعلى ذلك يتضح ببساطة أن خرائط المراقبة المتعددة لا تقلل من فحص خرائط المراقبة الفردية لكل متغير على حدة .




شكل ( ١ ) خريطة المراقبة المتعددة لمجموعة البيانات فى بدء العملية الإنتاجية

وبعد استبعاد المشاهدة رقم ( 14 ) وإعادة العمليات الحسابية مرة أخرى لتقدير المعالم مع استخدام ( 17 ) مشاهدة ، نجد أن متجه المتوسطات المقدرة الجديدة هو :

$$\overline{x}_{17} = \begin{bmatrix} 32.4882 \\ 1.7541 \\ 1.5524 \\ 2.9024 \\ 20.5588 \\ 52.0441 \\ 49.0588 \end{bmatrix}$$

وكذلك أيضا فإن مصفوفة التغاير المقدرة الجديدة هى :

$$S_{17} = \begin{bmatrix} 0.5049 & 0.0011 & 0.0023 & 0.0103 & 0.0082 & -0.0335 & -0.2827 \\ 0.0011 & 0.0011 & -0.0006 & -0.0005 & 0.0053 & 0.0098 & 0.0078 \\ 0.0023 & -0.0006 & 0.0015 & -0.0004 & 0.0048 & -0.0054 & -0.0088 \\ 0.0103 & -0.0005 & -0.0004 & 0.0037 & -0.0061 & 0.0044 & -0.0191 \\ 0.0082 & 0.0053 & 0.0048 & -0.0061 & 0.5223 & 0.1388 & 0.0777 \\ -0.0335 & 0.0098 & -0.0054 & 0.0044 & 0.1388 & 0.7944 & 0.0111 \\ -0.2827 & 0.0078 & -0.0088 & -0.0191 & 0.0777 & 0.0111 & 0.6667 \end{bmatrix}$$

ومصفوفة الارتباط الجديدة :

$$R_{17} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0467 & 0.0836 & 0.2383 & 0.0160 & -0.0529 & -0.4873 \\ 0.0467 & 1.0000 & -0.4671 & -0.2478 & 0.2003 & 0.3315 & 0.2880 \\ 0.0836 & -0.4671 & 1.0000 & -0.1698 & 0.1715 & -0.1564 & -0.2783 \\ 0.2383 & -0.2478 & -0.1698 & 1.0000 & -0.1388 & 0.0812 & -0.3846 \\ 0.0160 & 0.2003 & 0.1715 & -0.1388 & 1.0000 & 0.2155 & 0.1317 \\ -0.0529 & 0.3315 & -0.1564 & 0.0812 & 0.2155 & 1.0000 & 0.0153 \\ -0.4873 & 0.2880 & -0.2783 & -0.3846 & 0.1317 & 0.0153 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

ونجد أن المتغيرات لا تزال مرتبطة فى مصفوفة الارتباط الجديدة $(R_{17})$ ولم تتغير إشارات معاملات الارتباط وإن تغيرت قيم هذه المعاملات مما يدل على أن استبعاد المشاهدة ( 14 ) من مجموعة المشاهدات أثر على قيم معاملات الارتباط .

وتكون حدود المراقبة الجديدة مع استخدام ( 17 ) مشاهدة هى :

الحد الأدنى

$$LCL = \frac{(17 - 1)^2}{17} \frac{\left(\frac{7}{17 - 7 - 1}\right)0.0228}{1 + \left[\left(\frac{7}{17 - 7 - 1}\right)0.0228\right]} = 0.2624$$

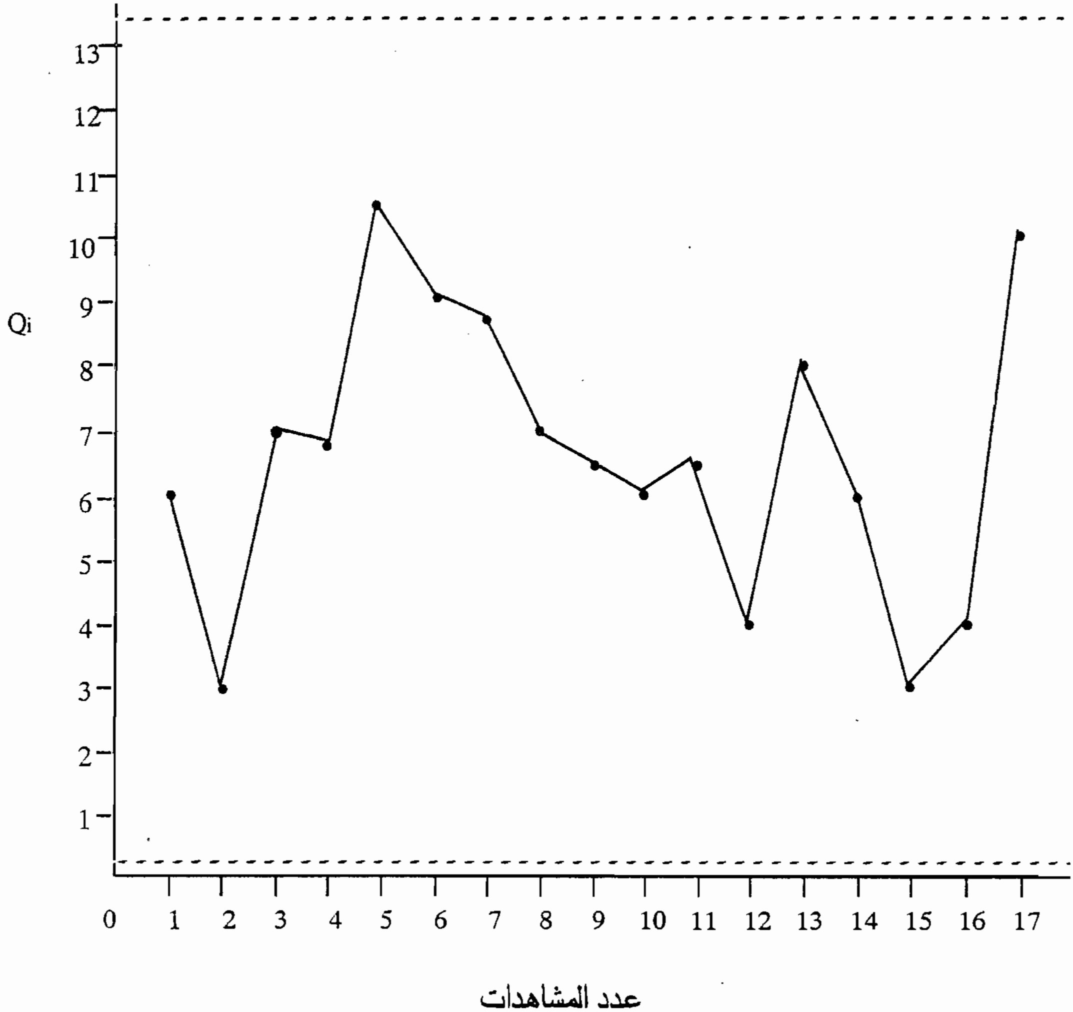
وكذلك الحد الأعلى :

$$UCL = \frac{(17 - 1)^2}{17} \frac{\left(\frac{7}{17 - 7 - 1}\right)6.88}{1 + \left[\left(\frac{7}{17 - 7 - 1}\right)6.88\right]} = 12.6878$$

وقد تم إيجاد كل من الحد الأدنى والحد الأعلى لحدود المراقبة المتعددة عند . ( $0.01 = \alpha$ )

والمقدار الإحصائى ( $Q_i$ ) الجديد المناظر لعدد ( 17 ) مشاهدة يمكن التعبير عنه بالمتجه الآتى :

$$(Q_i) = \begin{bmatrix} 6.1774 \\ 3.3795 \\ 7.4118 \\ 6.9987 \\ 10.4373 \\ 6.7491 \\ 6.1465 \\ 7.4923 \\ 7.0132 \\ 6.3954 \\ 6.4975 \\ 4.5647 \\ 8.4647 \\ 6.5460 \\ 3.0381 \\ 3.9296 \\ 9.6090 \end{bmatrix}$$




شكل ( 2 ) خريطة المراقبة المتعددة لمجموعة البيانات المعدلة للعملية الإنتاجية .

ويوضح شكل ( 2 ) أنه لا توجد أى مشاهدة خارج حدود المراقبة ، وعلى ذلك فإنه يمكن القول أن العملية الإنتاجية تحت الضبط الإحصائى بعد التخلص من النقاط المنحرفة عن حدود المراقبة ؛ أى بعد التخلص من أخطاء المعاينة ، ونتيجة لوجود العملية الإنتاجية فى بدء الإنتاج تحت الضبط الإحصائى أصبح فى الإمكان الاعتماد على العينة الأولية محل الدراسة فى إيجاد حدود المراقبة أو الضبط للمرحلة التالية للعملية الإنتاجية .

والسؤال الذى يواجهنا الآن هو كيفية المحافظة على الضبط الإحصائى فى المستقبل؟

وإجابة هذا السؤال تقودنا إلى المهمة الثانية لخرائط المراقبة الإحصائية المتعددة ، والتى تتم باكتشاف أى انحراف عن العملية الإنتاجية المعيارية والتى سبق إيجاد حدودها والتى سوف تستخدم لاختبار المشاهدات فى المستقبل .

نفترض الآن مشاهدات المستقبل ( $x_f$ ) والتى تكون مستقلة تماماً عن قيم كل من المتوسطات المقدرة والتباينات والتغايرات المقدرة والتى يعبر عنها ( $S_m$ & $\bar{x}_m$ ) بالترتيب وباستخدام المقدار الإحصائى ( $T^2$ ) كالآتى :

$$T_f^2 = ( x_f - \bar{x}_m)' S_m^{-1} = ( x_f - \bar{x}_m) \qquad (8)$$

حيث تعبر :

$x_f$ متجه مشاهدات المستقبل متعدد الأبعاد لعدد (p) من المواصفات أو المتغيرات.

$\bar{x}_m$ متجه المتوسطات متعدد الأبعاد لعدد (p) من المتغيرات وعدد (m) من المشاهدات .

$S_m$ مصفوفة التغاير من الدرجة ( $p \times p$ ) لنفس مجموعة المشاهدات .

وعندما يكون حجم العينة التى سحبت فى بدء العملية الإنتاجية كبيراً فذلك يجعلنا نفترض أن التقديرات ( $\bar{x}_m$ ) وكذلك ( $S_m$ ) معيارية وتساوى المعالم الفعلية للمجتمع ( $\sum$ , M ) بالترتيب فإن المقدار الإحصائى ( $T_f^2$ ) يأخذ الشكل الآتى :

$$T_f^2 = ( x_f - \mu)' \textstyle\sum^{-1} ( x_f - \mu) \qquad (9)$$

حيث يتبع توزيع ( $\chi^2$ ) مع درجات حرية ( p ) . وفى هذه الحالة فإن كلاً من حدود المراقبة يمكن الحصول عليهما باستخدام المعادلة ( 2 ) وكذلك المعادلة ( 3 ) .

وتعتبر هذه الحدود كتقريب لتوزيع ( $\chi^2$ ) مع درجات حرية ( p ) طالما أن ($\bar{x}_m$) و ($S_m$) بمثابة متغيرات عشوائية وليست معالم المجتمع ، والتطبيق العملى أفاد بأن قد لا يكون هناك احتياج لهذا التقريب طالما أن التوزيع الفعلى للمقدار ( $T_f^2$ ) يمكن الحصول

عليه ؛ حيث أوضح سابقا أن :

$$T_f^2 = \frac{p\,(\,m+1\,)(\,m-1\,)}{m\,(\,m-p\,)}\,F\,(\,p\,,m-p\,)$$

وعلى ذلك فإن حدود المراقبة الفعلية هى :

الحد الأدنى :

$$LCL = \frac{p\,(\,m+1\,)(\,m-1\,)}{m\,(\,m-p\,)}\,F\,(\,1-\frac{\alpha}{2}\,;\,p\,,m-p\,)$$

والحد الأعلى :

$$UCL = \frac{p\,(\,m+1\,)(\,m-1\,)}{m\,(\,m-p\,)}\,F\,(\,1-\frac{\alpha}{2}\,;\,p\,,m-p\,)$$

وإذا افترض أن متجه المستقبل للمشاهدات :

$$x_{f_1} = \begin{bmatrix} 33.2129 \\ 1.7445 \\ 1.5667 \\ 2.9600 \\ 20.1500 \\ 52.3049 \\ 48.8142 \end{bmatrix}$$

ولاتخاذ القرار بأن العملية الإنتاجية مع متجه المستقبل السابق تحت الضبط أم لا ، تستخدم بيانات جدول ( ١ ) للمشاهدات التى تمثل العينة فى بدء العملية الإنتاجية وهى فى حالة الضبط ويمكن استنتاج حدود المراقبة الفعلية كالآتى :

الحد الأدنى :

$$LCL = \frac{7\,(\,17+1\,)(\,17-1\,)}{17\,(\,17-7\,)} \times 0.0229 = 0.2716$$

والحد الأعلى :

$$UCL = \frac{7(17+1)(17-1)}{17(17-7)} \times 6.30 = 74.7106$$

وباستخدام معادلة ( 8 ) نجد أن ( $T_f^2 = 3.3747$ ) وبمقارنة هذه القيمة بحدود المراقبة السابقة نجد أنها تقع داخلها ، وبالتالى يمكن القول أن متجه المستقبل للمشاهدات تحت الضبط أو المراقبة .

وإذا افترضنا متجه المستقبل لمشاهدات أخرى كالآتى :

$$x_{f_2} = \begin{bmatrix} 32.9994 \\ 1.7479 \\ 1.5224 \\ 3.1000 \\ 20.0588 \\ 51.6990 \\ 48.6776 \end{bmatrix}$$

وباستخدام معادلة ( 8 ) نجد أن قيمة ( $T_f^2 = 13.5032$ ) وأيضاً تقع هذه المشاهدة داخل حدود المراقبة وعليه فإن هذه المشاهدة تحت الضبط .

ونجد أن الحد الأعلى ( UCL ) باستخدام حدود المراقبة الفعلية المستخدم فى المحافظة على ضبط المشاهدات فى المستقبل وقيمته ( 74.7106 ) أكبر ( 6 ) مرات تقريباً عن الحد الأعلى الذى تم الحصول عليه عند إنشاء المراقبة الإحصائية فى بدء العملية الإنتاجية وقيمته ( 12.6878 ) .

وعندما يكون عدد المجموعات داخل العينة محل الدراسة صغيراً بالإضافة إلى أن حجم كل مجموعة مشاهدة واحدة والعملية الإنتاجية فى مرحلة البدء وبافتراض أن المشاهدات داخل العينة مستقلة ؛ فيلاحظ أن متجه المتوسطات ومصفوفة التغاير لهذه العينة تنتج حدا أعلى متحفظا ( Conservative ) .

ومن ناحية أخرى نجد أن التوزيع التقريبى ( $\chi^2$ ) المستخدم فى معادلة ( 3 ) سوف

يكون الحد الأعلى له قيمته [ $UCL = \chi^2 ( 1 - \frac{\alpha}{2} ; p ) = 20.3$ ] والذى يعتبر بالنسبة للحالة الأولى – وهى إنشاء حدود ضبط فى مرحلة بدء العملية الإنتاجية متحفظاً . بينما يعتبر بالنسبة للحالة الثانية وهى استخدام هذه الحدود البيانات المستقبل متساهلاً أو متسامحاً .

وبسهولة جداً يمكن مقارنة حدود المراقبة العليا المتعددة للضبط فى مرحلة بدء الإنتاج باستخدام التوزيع الفعلى ( Beta ) وبين حدود المراقبة العليا للضبط فى نفس مرحلة الإنتاج باستخدام التوزيعات التقريبية ( $\chi^2$ , F ) من الجداول الإحصائية مباشرة وجدول رقم ( 3 ) يوضح هذه المقارنة عند عدد متغيرات ( p ) يأخذ القيم ( p = 5 , 7 10 ) وكذلك عدد المجموعات ( m ) تأخذ القيم ( m = 10 , 15 , 20 , 30 , 60 , 120 ) ؛ كالآتى :

جدول ( 3 ) حدود المراقبة العليا المتعددة عند : $\alpha = 0.01$

| m | p = 5 | | | p = 7 | | | p = 10 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Beta | F | $\chi^2$ | Beta | F | $\chi^2$ | Beta | F. | $\chi^2$ |
| 10 | 7.82 | 147.51 | 16.75 | 8.09 | 1025.64 | 20.3 | | | 25.20 |
| 15 | 10.53 | 51.30 | 16.75 | 11.75 | 101.79 | 20.3 | 12.82 | 406.19 | 25.20 |
| 20 | 12.03 | 35.71 | 16.75 | 13.77 | 56.93 | 20.3 | 15.83 | 116.71 | 25.20 |
| 30 | 13.59 | 27.03 | 16.75 | 15.95 | 37.39 | 20.3 | 18.94 | 57.69 | 25.20 |
| 60 | 15.13 | 20.94 | 16.75 | 18.25 | 26.86 | 20.3 | 22.30 | 36.47 | 25.20 |
| 120 | 15.97 | 18.68 | 16.75 | 19.26 | 23.11 | 20.3 | 23.70 | 29.88 | 25.20 |

ولقد أخذ فى الاعتبار فى الجدول السابق أن يحتوى على أحجام المجموعات صغيرة متمثلة فى الأحجام (10 ,15 , 20) وكذلك أحجام المجموعات الكبيرة (30 ,60 ,120) وفى نفس الوقت كان عدد المتغيرات تحت الدراسة فى تزايد ( 5 ثم 7 ثم 10 ) ويلاحظ فى الجدول الآتى :

عند المجموعات الصغيرة ( 15 ) مثلاً مع عدد متغيرات ( 5 ) ؛ نجد أنه باستخدام توزيع ( Beta ) فإن ( UCL = 10.53 ) بينما باستخدام توزيع ( F ) يبلغ (147.51 ( وأخيراً باستخدام ( $\chi^2$ ) يساوى ( 16.75 ) فى حين إذا استخدم عدداً أكبر من المتغيرات وليكن ( 10 ) نجد أن الحدود العليا لكل من ( $\chi^2$ , F , Beta ) هى ( 12.82 , 406.19 , 25.20) وذلك بالترتيب والفروق الواضحة هنا بين الحدود العليا للمراقبة المتعددة بسبب الأخطاء الناتجة من استخدام توزيعات تقريبية ( $\chi^2$ , F ) .

أيضاً يلاحظ أن الحدود العليا للمراقبة المتعددة باستخدام توزيع ( Beta ) أقل حدود مهما كان حجم المجموعات وعدد المتغيرات يليها توزيع ( $\chi^2$ ) ثم ( F ) أخيراً .

وعند تطبيق الأساليب التقريبية السابقة على البيانات المتاحة فى مثالنا كاملة أى إذا لم نستبعد منها أى مشاهدات فإننا نكون بصدد ( P = 7 ) وكذلك ( m = 18 ) وعلى هذا فإن باستخدام تقريب ( $\chi^2$ ) نجد أن الحد الأعلى للمراقبة المتعددة عند ( $\alpha = 0.01$ ) هو (UCL = 20.3) وإذا ما استخدم تقريب (F) نجد الحد الأعلى ( UCL = 68.17) .

ويلاحظ أن قيمة الحد الأعلى الأخيرة أكبر كثيراً من قيمة الحد الأعلى الذى تم تحديده سابقاً والتى تبلغ ( 13.0878 ) مما يدل على أن الأساليب التقريبية تنتج تقديرات عالية بالنسبة للحدود العليا .

## ملخص

تعتبر خرائط المراقبة المتعددة ( $T^2$ ) بمثابة أداة تحليل فعالة لمراقبة عدة مواصفات آنيا وخاصة إذا كانت العملية الإنتاجية فى مرحلة البدء ، حيث غالباً ما تحتوى العينة المستخدمة على عدة مجموعات ، وكل مجموعة عبارة عن مشاهدة واحدة فقط أى (مشاهدات أولية فردية ) وللاعتماد مستقبلاً على حدود المراقبة الناتجة من مثل هذه العينة ؛ يجب أن تكون القاعدة المستخدمة لإنشاء حدود المراقبة ذات تقديرات دقيقة ولذلك استخدم توزيع (Beta ) للحصول على الإحصاء ( $T^2$ ) أى ( $Q_i$ ) حيث كانت نتائجه أكثر دقة من استخدام التوزيعين التقريبيين ( F ) و ( $\chi^2$ ) وخصوصاً مع أحجام المجموعات الصغيرة فى مرحلة البدء كما فى حالتنا التطبيقية .

المراجع :

1- **Alt, F.B.** ( **1985** ) , " Multivariate Quality Control " , Encyclopedia of statistical Sciences , 6 ( S.Kotz and N.Johnson , eds ) , John Wiley & Sons, New York , NY, PP. 110 - 122 .

2- **Gnanadesikan , R.,** ( **1977** ) . Methods for statistical Data Analysis of Multivariate Observations , John Wiley , Sons , New York , NY.

3- **Hawkins, D.M.** ( **1991** ) , " Multivariate Quality Control Based on Regressien - Adjusted Variables " , Technometrics 33 , PP. 61 - 76 .

4- **Hotelling , H.** ( **1947** ) , " Multivariate Quality Control " , Techniques of statistical Analysis ( C. Eisenhart , M. Hastay, and W.A. Wallis , eds ) , Mc Graw - Hill , New York , NY , PP. 111 - 184 .

5- **Jackson , J.E.** ( **1985** ) " Multivariate Quality Control " , Communications in statistics , 14 ( 11 ) , PP. 2657 - 2688 .

6- **Mantgomery D.C.,** ( **1991** ) , Introduction to statistical Quality control , 2 nd ed ., John Wiley & Sons , New York .

7- **Nelson . L.S.,** ( **1984** ) , The shew hart control chart - tests for special causes , J. Quality technal ., 16 , PP . 237 - 239 .

8- **Nelson . L.S.,** ( **1985** ) , Interpreting shewhart $\bar{x}$ control charts , Journal . Quality Technal ., 17 , PP. 114 - 116 .

9- **Roy. S.N.** , ( **1957** ) Some Acpects of Multivariate Analysis John Wiley & Sons Inc., New York .

10- **Ryan** , **T.P.,** ( **1989** ) , Statistical Methods for Quality Improvments . Wiley , New York .

11- **Seber** , **G.A.F.** , ( **1984** ) , Multivariate Observations , John Wiley & Sons , New York .

12- **Sultan** , **T.I.,** ( **1986** ) , An acceptance chart for raw material of two correlated properties , Quality Assurance , 12, PP. 70 - 72 .

13- **Tracy** , **N.C., and Young, J.C.,** ( **1992** ) , Multivariate control charts for Individual observations , Journal Quality Technal ., 24 , PP. 88 - 95 .