تحليل وتصميم دراسات النمو الجسمانى
باستخدام نموذج اللوجستك
مع التطبيق على بيانات النمو لمحافظة الدقهلية

د . محمد توفيق البلقيني
أستاذ الإحصاء الإكتواري المساعد
كلية التجارة – جامعة المنصورة

١ – مقدمـــــة

تعتبر دراسة ظاهرة النمو الطبيعي *Physical growth* للإنسان من الدراسات الهامـة فـى العلـوم الاجتماعية و النفسية والطبية وتعتبر هذه الظاهرة من المعايير الهامة والتي تعكس المستويات الاقتصادية والاجتماعية والثقافية والوراثية وكذلك مستوى الصحة العامة في المجتمعات . ولقد إجريـت العديـد من الدراسات والبحوث البيولوجية والاجتماعية والطبيعية على ظاهرة النمو ، ولقد تم دراسة الكثـير من النماذج الرياضية والإحصائية كمحاولات لتوفيـق بيانـات تلـك الظـاهرة . وفـى دراسـة سـابقة للباحث (البلقينى وآخرين 1993) تم عمل تحليل إحصائي لمنحنى النمو الجسمانى باستخدام بيانـات النمو لمحافظة الدقهلية وذلك باستخدام نموذج اللوجستك *Logistic model* حيث تم تقديـر معلمـات هذا النموذج إحصائيا . ففى تلك الدراسة تم الاهتمام بفترة المراهقـة فقـط أو بمعنـى آخـر تم دراسـة منحنى النمو فى مراحل العمر من ٦ سنوات حتى ١٨ سنة أو أكثر قليلا . ولقد تم التعرض فى تلك الدراسة إلى مشاكل تطبيق النموذج المقترح ثـم استخدام بعـض الطـرق الإحصائيـة (اختبـار التـابع *Runs test* ، وكذلك اختبار درجة الإعتمادية *Reliability analysis*) للحكـم علـى مـدى كفـاءة التقديرات وبالتـالى كفـاءة أو صلابـة النمـوذج المستخدم . وتم أيضـا شـرح وتفسـير ظـاهرة النمـو الجسمانى باستخدام المعلمات الإحصائية المقدرة فى تقدير المعلمات البيولوجية الخاصة بظاهرة النمـو الجسمانى خلال فترة المراهقة . وحيث أن الدراسة السابقة للباحث تعتبر دراسة رائدة فى هذا المجـال فى جمهورية مصر العربية فإننا نهدف فـى هـذا البحـث إلى فحـص النمـوذج المقـترح وإثبـات مـدى كفاءته أو صلابته *Robustness* فى توفيق البيانـات وذلـك عـن طريـق استخدام أسـاليب إحصائيـة إضافيـة مثـل الانحـدار التشـخيصى *Regression diagnostics* وكذلـك تصميــم التجــارب *Experimental design* للتأكد من فاعلية المعلمات المقدرة فى البحث السابق وإثبات مدى صلابـة

أو متانة (*Robustness*) النمـوذج المستخدم لتفسير وشرح منحنى النمو الجسماني خلال فترة المراهقة وبالتالى يمكن تقديم دليل واضح للباحثين الراغبين فى تصميم تجارب ذات فاعلية عند دراسة ظاهرة النمو الجسمانى ، وكذلك فإن الهدف أيضا هو تحديد تأثير البيانات على النتائج المقدرة باستخدام النموذج المقترح حتى يمكننا الحصول على أسلوب تقدير مناسب وفعال. وسوف يتم أيضا إعطاء تفسير بيولوجى للنموذج المستخدم.

١ – ١ – الأسلوب المستخدم لتقدير معلمات النمو باستخدام بيانات النمو الفعلية .

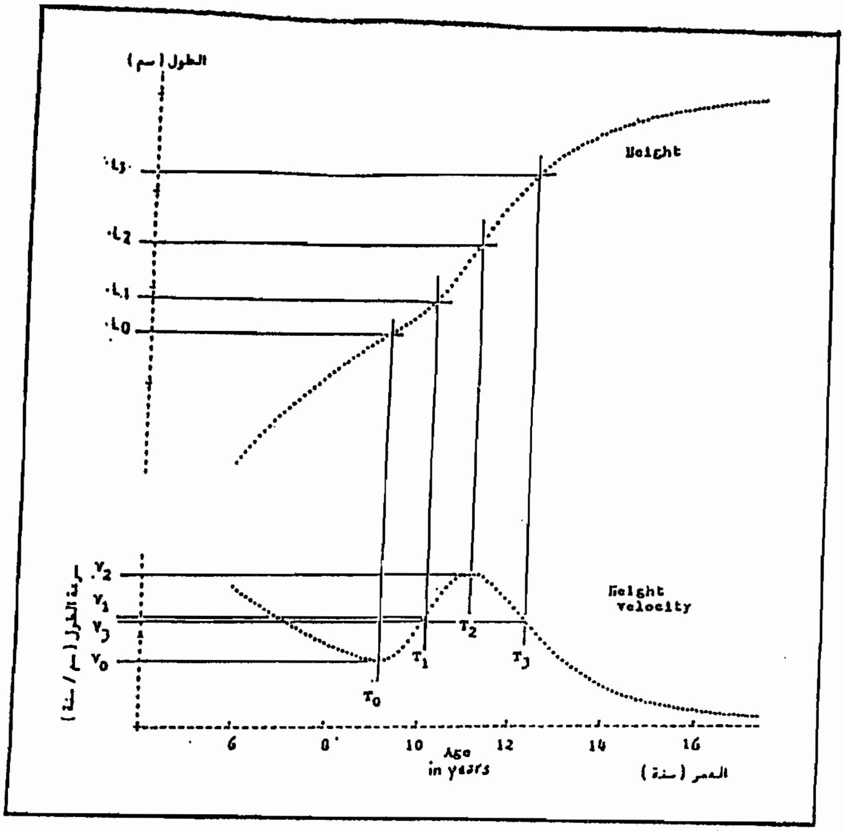
إن الأحداث البيولوجية الحساسة والتي تحدث خلال فترة المراهقة والنمو المتزايد خلال هذه الفترة يمكن تقديرها بصفة عامة باستخدام بيانات النمو الطولية (أي نتابع تاريخ النمو للفرد محل الدراسة على مدى سنوات طويلة) وذلك باستخدام النماذج المعلمية *Parametric model* وفى البحث السابق للباحث تم التغلب على تلك المشكلة عن طريق اختيار عينة من تلاميذ وتلميذات المدارس من سن ٦ سنوات حتى ١٨ سنة (البلقينى وآخرين 1993) وتم افتراض أن النموذج هو

$$h_t = f(t, \theta_n) + e \qquad , \qquad n = 1, \ldots\ldots, 5$$

حيث أن t تمثل العمر أو السن ، h_t عبارة عن الطول عند العمر أو السن t ، e عبارة عن الخطأ العشوائي (أى خطأ النموذج أو خطأ القياس) ، $\theta_n = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$ وتسمى معلمات النموذج . وسوف يطبق النموذج على بيانات كل فرد على حدة وذلك لتوفيق البيانات على النموذج عن طريق إختيار θ_n والتي تجعل مربعات الفروق بين الدالة $f(t, \theta_n)$ عن القيم المقاسة الفعلية h_t أقل ما يمكن أو نهاية صغرى (أى أن ذلك معناه جعل e^te نهاية صغرى بدلالة θ_n) .

ونلاحظ أن الأحداث البيولوجية المطلوبة فى هذه الدراسة يمكن التعبير عنها كدوال في معلمات النموذج ، وبالتالي يمكن تقديرها عن طريق إستخدام البيانات الفعلية والتي تطبق على ذلك النموذج، وقد إفترضنا أن تلك الأحداث البيولوجية هي $y_i = g_i(\theta_n)$ والتي تسمى معلمات النمو. وشكل (١) يوضح التفسيرات البيولوجية للنموذج المقترح والذى سبق دراسته ومناقشته فى البحث السابق (البلقينى وآخرين 1993) ، ولقد لاحظنا أن هناك معلمتين من معلمات النمو لهما دلالة خاصة وهما t_0 (وهو العمر الذي يبدأ عنده نمو فترة المراهقة السريع ويمكن التعبير عنه بسن الاقلاع *Take-off*) وكذلك t_2 (أى العمر الذي يكون عنده نمو المراهقة سريع أى نهاية عظمى) وسوف نركز في هذا البحث على هاتين المعلمتين بشئ من التفصيل . وسوف نقوم هنا أيضا

بتوصيف مجتمع الدراسة عن طريق تلخيص معلمات النمو المقدرة لعدد من الأفراد ، وبالتالى سوف يتم حساب المتوسطات والإنحرافات المعيارية وكذلك معاملات الإرتباط بغرض وصف مجتمع الدراسة.



شكل (١)

التفسيرات البيولوجية للنموذج المقترح

١- ٢ - الحاجة لإسلوب فعال وصلب للتقدير :

وحيث أن النموذج المختار والذي يمكن تطبيقه لتوفيق بيانات النمو التي تكون عادة كثيرة التعقيد ولا تعتمد بالضرورة على إعتبارات بيولوجية ، كذلك نجد أن كفاءة وجودة البيانات وكذلك جودة طريقة جمعها تكون غير متاحة في المدى البعيد نظراً لاحتياج تلك الدراسة الى فترة طويلة لتجميع البيانات والتي كانت أهم العقبات في هذا التطبيق حيث وجدنا أنه لا توجد سجلات خاصة بالافراد لدى الاطباء طول فترة المتابعة في محافظة الدقهلية . ومن هنا فإن أى باحث لابد أن

تواجهه صعوبات كثيرة للحصول على تلك البيانات وفي دراسات سابقة قام *(Rand and Waternaux 1978)* بإستخدام بيانات ستة فتيات تمثل نماذج مختلفة للنمو من المجتمع محل الدراسة واستخدموا هذه البيانات في اشتقاق معلمات بعض النماذج الرياضية ، ولقد قاموا بفحص مدى حساسية معلمات النمو لأى تغيرات صغيرة قد تحدث في مجموعات البيانات الخاصة بالنمو بمعنى أنه في حالة وجود بيانات شاذة فإنهم يقومون بحذف تلك البيانات ثم إعادة التقدير لاستخراج تقديرات جديدة تكون أكثر تمثيلا للبيانات ، ولكن كان رأيهم النهائي أن إسلوب التقدير الذي تم استخدامه غير فعال وغير صلب *Not robust* لأن معلمات النمو *Growth parameters* المستخرجة من العينة تتأثر بشدة أو بمعنى آخر تكون شديدة الحساسية (ولكن ليس في جميع الأحوال) بالنموذج المستخدم وكذلك بمجموعة البيانات التي يتم فحصها . وفى هذا البحث تم إستخدام بيانات النمو الخاصة بمحافظة الدقهلية والتى سبق للباحث إستخدامها فى البحث السابق .

٢ – النموذج المقترح :

فى دراستنا السابقة تم إستخدام نموذج اللوجستك لتوفيق بيانات النمو الجسماني للانسان خلال فترة المراهقة والذى يأخذ الشكل التالى :

$$h_t = \theta_1 - \theta_2 / \{ \exp [\theta_3 \ (t - \theta_4)] + \exp [\theta_5 (t - \theta_4)] \} + e$$

حيث أن θ_1 عبارة عن الطول عند سن النضوج ، θ_2 عبارة عن الفرق بين الطول عند سن النضوج θ_0 ، والطول المبدأى θ_1 الذى يتم إستخدامه كقيمة أولية لتقدير تلك المعلمات ، أى أن $\{\theta_2 = 2(\theta_1 - \theta_0)\}$. أما θ_3 ، θ_5 فهى عبارة عن معدلات نسبية ذات حساسية عالية لقراءات النمو ، θ_4 عبارة عن مقدار بالسنوات يتميز بثبات نسبى لكل بيانات نمو على حدة ولكنه يختلف من بيانات نمو لأخرى. ولقد تم إختيارنا لهذا النموذج لتمثيل بيانات النمو في محافظة الدقهلية. وبإستخدام البيانات الحقيقية وجد أن الخطأ العشوائي المقدر والمجمع للذكور *Pooled estrmate of error* في العينة المستخدمة في البحث (عشرة ذكور) هو (0 .1297 cm -) وكذلك بالنسبة للإناث (عشرة إناث) وجد أنه (0.34995 cm)، وهو يعتبر مقدار صغير جداً في الذكور إذا ما قورن بالنسبة للإناث ولكن في كلتا الحالتين وجد أن ذلك الخطأ يعتبر صغير للغاية إذا ما قورن بذلك الخطأ الذي ظهر في دراسة *Preace & Baines* وهو (0.44 Cm) وهذا يدل على أن البيانات المستخدمة في عينة الدراسة هنا تمثل المجتمع الذي أخذت منه تمثيلا جيداً وأن هذه البيانات في عينة

البحث جمعت بواسطة باحث متحري واحد وبالتالي كان هناك دقة في عمليات القياس، علاوة على ذلك فإن صغر الخطأ المُجمع في هذه الدراسة راجع إلى دقة وكفاءة النموذج المستخدم لتوفيق تلك البيانات، وهذا يدل على إختيار النموذج المناسب والذي يوفق البيانات توفيقاً جيداً . ولقد إتضح أن الأخطاء العشوائية بالنسبة لكل فرد من الأفراد (إناث أو ذكور)، يعتبر صغيراً جداً، وهذا يفسر لنا أن أخطاء القياس والحذف قليلة وصغيرة بالنسبة للنموذج وهذا مؤشر يدل على صلاحية النموذج المستخدم .

وحتى يمكن تحديد إذا ما كان التحيز الملازم للنموذج المستخدم مختلف عن الخطأ الكلى أو المجمع فإنه تم إختبار البواقي مرتبة حسب الوقت أو الزمن *Time-ordered residuals*. فإذا كان النموذج الذي تم إختياره لا يشابه ولا يحاكي منحنى النمو التجريبي أو المنحنى الناتج عن البيانات الفعلية . فإننا سوف نلاحظ أن البواقي سوف يكون بينها علاقة إرتباط موجبة . وسوف تسمى مجموعة البواقي ذات الاشارة المتشابهة (موجبة أو سالبة) تتابع واحد (*Run*) ويكون طول التتابع (*Run*) معرفاً بعدد البواقي التي لها نفس الاشارة ولإختبار الفرض الإحصائي بما إذا كانت البواقي المرتبة حسب الفترة الزمنية *Time-ordered residuals* مستقلة ، وذلك بإحتمال متساوي بأن تكون موجبة أو سالبة ، فإننا سوف نقوم بمقارنة عدد التتابعات *Runs* الفعلية (المشاهد) بعدد التتابعات المتوقعة تحت إفتراضنا الإحصائي . فإذا إفترضنا أن u تساوي عدد التتابعات المشاهدة *Number of runs* ، m عبارة عن البواقي الفعلية (المشاهدة) والتي لها إشارة موجبة ، n عبارة عن عدد البواقي الفعلية والتي إشارتها سالبة وبالتالي نجد أن القيمة المتوقعة لعدد التتابعات u تكون:

$$E(u) = \left(\frac{2mn}{m+n} + 1 \right)$$

ويكون التباين لعدد التتابعات u عبارة عن (*Brownlee, 1960*) .

$$V(u) = \frac{2mn(2mn - m - n)}{(m+n)^2 (m+n-1)}$$

ويمكننا حساب القيمة المعيارية الطبيعية كما يلي :

$$Z = \frac{u - E(u)}{\sqrt{V(u)}}$$

لكل من الذكور والإناث العشرين في العينة التي إستخدمت في هذا البحث . ولقد وجد أن المثينات لهذه القيم العشرين كما فى جدول (١) ولقد حسبت قيم المثينات للعشرة ذكور على حدة وكذلك للعشرة إناث على حدة (ولقد تم وضع قيم الإناث بين الأقواس) .

جدول (١)

Percentile	Male (Female)
5^{th} pecentile	Z = -0.269 (- 0.852) ,
25^{th} pecentile	Z = 0.314 (0.314) ,
50^{th} pecentile	Z = 0.897 (1.016) ,
75^{th} pecentile	Z = 1.136 (1.751) ,
95^{th} pecentile	Z = 1.700 (2.366) .

ولقد وجد أن الإفتراض الخاص بأنه لا يوجد أى تحيز منظم للنموذج (كما سبق قياسه بإستخدام إختبار التتابع *Runs test* الذى تم تطبيقه على البواقى) سوف يرفض فقط عند المستوى 5% سواء للذكور على حدة أو للإناث على حدة ، ومن هنا سوف نجد أن تغيرات بسيطة للبواقي أو أن الإنحرافات لها عن منحنى التوفيق تقل عن القيم المتوقعة منها . وبالمقارنة ببيانات بيريس وبانيز نجد أن نتائجنا تتفق معها فى أن هناك علاقة بين الاخطاء وهو ما يسمى إحصائياً *Autocorrelation* . وحيث أن إختبار التتابع *Runs test* يهمل حجم البواقي فإننا نستخدم إختبار أكثر قوة منه وهو حساب قيمة إختبار دربن-واتسن *Durbin-Watson statistic* لإختبار علاقة الإرتباط الذاتي *Autocorrelation* بين الأخطاء عن طريق إسلوب الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى *First-order autoregressive process* (*Sebler 1977*) . ونجد أن الإختبار الخاص بأنه لا توجد إرتباطات لا يمكن رفضه عند مستوى 5% لثمانية عشرة من المشاهدات الخاصة بالذكور وبالإناث ، أما الحالتين الآخيرتين فإنه لايمكن تحديد القبول أو الرفض لهما من الجدول المتاح والخاص بالقيم الحرجة. وهذا يدل على أن الأخطاء أقل عما تم ذكره في إختبار التتابع *Runs test* وبالتالي فإن إهمال الإرتباط سوف يؤدي إلى تقدير تباينات صغيرة للمعلمات .

ونلاحظ أن نموذج اللوجستك يعتبر نموذجا مناسبا لبيانات هذه الدراسة، حيث أظهر توفيق جيد للبيانات من سن السادسة حتى سن الثامنة عشرة وإذا نظرنا إلى التحيز الذي ظهر لهذا النموذج نجد أنه ضئيل جداً إذا ما قورن بقياسات الخطأ. ومقابل ذلك نجد أن التطبيق الذي أجراه بوك (*Bock , et al,* 1973) بإستخدام توزيع اللوجستك المزدوج *Double logistic distribution*

والذي يحتوي على معلمات أكثر، حيث نتج عنه أخطاء قياس أكبر من الاخطاء التي ظهرت في هـذه الدراسة، كما أظهر تحيز ملموس عندما قام بريس وبانيز تطبيقة على بياناتهما. ولكننا لم نقوم بتطبيق ذلك النموذج على بيانات هذه الدراسة حيث أظهر نموذجنا المقترح توفيقاً دقيقاً للبيانـات . وسـوف نقوم الآن بعمل توصيف أكثر لهذا النموذج بهدف الوصول إلى توفيق أوضح وفعال للبيانات .

٣ – دراسة العلاقة الهيكلية لتغاير معلمات النموذج المقترح

وفى البحث السابق تم إختيار بيانـات إنثى واحـدة بحيـث تمثـل الإنـاث (البلقينى وآخريـن 1993) ، ولقد تم إختيار بيانات إنثى قريبة من الوسيط وكذلك من الوسط الحسابى لبيانـات الإنـاث الأخريات وسوف يتم إستخدام هذه البيانات لتلـك الإنثـى لتمثيـل بيانـات النمـو للإنـاث فـى هـذا البحث وكذلك الحال بالنسبة للذكور وسوف نطلق عليهما بيانات الذكور وبيانـات الإنـاث. وفـى البحث السابق وجد أن هذه البيانات بالنسبة للإناث والذكور كما هو موضح بجدول (٢)

جدول (٢)

Parameter	Sex	Values	C.V
θ_0	M	161.8002 years	.8% (.4% - 1%)
	F	151.9955 years	3.2% (2% - 10%)
θ_1	M	172.8624 years	1.2% (.6% - 3%)
	F	163.0318 years	2.1% (.7% - 6%)
θ_3	M	0.110712 years^{-1}	16.3% (10%-25%)
	F	0.11550 years^{-1}	37.8% (20% -40%)
θ_4	M	14.5006 years	3.8% (2% - 5%)
	F	12.8765 years	8.1% (6% - 11%)
θ_5	M	1.132097 years^{-1}	63.2% (30%-75%)
	F	0.71130 years^{-1}	38.1% (20% -42%)

ونلاحظ أن θ_0 ، θ_1 يكون التمييز لها بالسنوات وهى تعـبر عـن الطـول فىفـترات مختلفـة مـن العمـر (الطول عند النضوج والطول المبدأى) ، أما θ_4 فهى عبارة عن مقدار بالسنوات ، أما θ_3 ، θ_5 فهـى معدلات نسبية صغيرة يمكن التعبير عن مقلوبها بالسنوات . من الجدول السابق أيضـا يمكننـا معرفـة معـاملات الإختـلاف *Coefficients of variation* المقـدرة ، وهـذه القيـم تم حسـابها عـن طريـق إستخدام عناصر مصفوفة التباين والتغاير التى سبق الحصول عليها عن طريق $4\hat{\sigma}_e^2 H^{-1}J^T JH^{-1}$ والتى تم الحصول على بياناتها بالطرق الرقميـة وتظهـر معـاملات الإختـلاف للذكـور وللإنـاث فـى جدول (٢) أما القيم التى بين الأقواس فى نفس الجدول فتوضح المدى لمعاملات الإختلاف لبيانـات

جميع أفراد الدراسة سواء للذكور أو للإناث . وجدول (٣) يوضح مصفوفة التباين والتغاير وكذلك مصفوفة الإرتباط بين معلمات النموذج الخمسة والتى تم عرضها فى البحث السابق .

جـدول (٣)

Parameters	θ_0	θ_1	θ_3	θ_4	θ_5
θ_0	1.7587 (23.094)	- .06046 (.30358	.45473 (.95397)	.7801 (.96878)	- .01186 (.68741)
θ_1	- .1638 (1.7617)	4.1759 (11.4581)	- .8627 (- .5318)	.10834 (.32414)	- .54143 (- .05937)
θ_3	.01067 (.20122)	- .0314 (.00282)	.00031 (.00193)	.07158 (.91619)	0.48744 (.80591)
θ_4	.56539 (4.8478)	.12102 (.40754)	.00069 (.04187)	.2988 (1.0842)	- .08503 (.23290)
θ_5	.01524 (1.1248)	- 1.0725 (- .2441)	.00836 (.01204)	- .16047 (.65699)	.93972 (.11594)
Mean	161.486 (151.5281)	173.066 (162.866)	.10857 (.11621)	14.446 (12.8318)	1.5350 (.89468)
SD	1.3259 4.8057)	2.0435 (3.38498)	.0177 (.04389)	.54663 (1.04126)	.96939 (.34049)
M - F	9.9579	10.2	- .00764	1.6142	.64032

وتقع التباينات على القطر الرئيسي فى جدول (٣) وتقـع التغـايرات المختلفـة أسـفل القطـر الرئيسـي بينما تقع الارتباطات المختلفة بين المعلمات فوق القطر الرئيسي وذلك لكل مـن الذكـور والانـاث ، أيضا يوضح الجزء الذي يقع أسفل الجدول معلمات أخرى مثل المتوسـط Mean والانحراف المعيـاري SD للمعلمات لكل من الذكور والاناث وكذلك الفرق بينهـم (الذكـور - الانـاث) لتوضيـح أن هناك معلمات تكـون أكـبر في حالـة الذكـور عنهـا في حالـة الإنـاث ونلاحـظ أن البيانـات الخاصـة بتقديرات الإناث دائما توجد داخل اقواس بالجدول . ومن جدول (٣) نلاحظ أيضـاً أن θ_0 ، θ_1 ، θ_4 تكون أكبر بشكل واضح في الذكور عنها في حالة الإناث بينما θ_3 تكون اكبر في حالـة الانـاث عنها في الذكور وهذا واضح من الجدول عند أخذ الفروق بين متوسـطات الذكـور والانـاث واذا تم أخذ الفرق لجميع الحالات نجد أن θ_5 لا تتأثر بنوع الجنس على الرغم من أنهـا أكـبر في الجـدول في حالة الذكور ، ونلاحظ من الجدول أن العلاقة بين θ_0 ، θ_4 علاقة قوية تساوي 969. للاناث ، 78. للذكور وتعتبر أعلى علاقة ارتباط بين المعلمات المختلفة، ونلاحظ أيضا أن هناك علاقة عكسية سالبة بين θ_1 ، θ_3 فهي تصل في الذكور الى 86.- أما بالنسـبة للانـاث فتصـل الى 53.- . أمـا التباينـات

المختلفة فان أعلى تباين يكون خاص بالمعلمة θ_1 ويصل الى 4.1759 في الذكـور ، ويكون أعلى مـا يمكـن بالنسـبة للاناث للمعلمـة θ_0 ويقـدر بحـوالي 23.09 . ونلاحـظ أن القيـم الموضحـة داخـل الأقواس هي الخاصة بالإناث . وسوف نقوم هنا بالتحرى عن الإختلافات *Variation* بين معلمـات النموذج ذو المعلمات الخمسة وذلك بإستخدام التحليل الاحصائى *Principal components* (تحليـل العناصر الرئيسية) وذلك لأن النتائج التى نحصل عليها عن طريق مصفوفة التباين والتغـاير تكـون غـير سليمة أو غير دقيقة ، وذلك لأن تحديد قيم المعلمات يكون بإستخدام أوزان إفتراضية . وحيـث أننـا نهتم أساسا بالعلاقة الهيكلية لمعلمات النموذج عند تطبيقه على بيانات النمو الخاصة بكـل فـرد فإننـا سوف نقوم بتحليـل مصفوفـة الإرتبـاط الخاصـة بالمعلمـات المقـدرة للنمـوذج بالنسبة للإفـراد محـل الدراسة. وعند إجراء هذا التحليل الإحصائى على الأفراد العشرين الذين يمثلون عينة الدراسة ، وجد أن فراغ المعلمة *Parameter space* يمكن تمثيله بسهوله فى إتجاهين . وفيما يلى نعرض قيمـة متجـه الجذور المميزة *Characteristic roots* وكذلك قيم المتجهات المـميزة *Characteristic vectors* لبيانات الذكر والأنثى المختار بيانات النمو لهم على التوالى :

$$
\begin{pmatrix} 1.251 \\ 0.480 \\ 0.053 \\ 0.007 \\ 0.000 \end{pmatrix}
\qquad
\left|
\begin{pmatrix} 0.074 \\ -0.342 \\ 0.600 \\ -0.101 \\ 0.471 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.664 \\ -0.039 \\ 0.222 \\ 0.651 \\ -0.292 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -0.071 \\ 0.121 \\ -0.360 \\ 0.538 \\ 0.749 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.572 \\ 0.561 \\ 0.162 \\ -0.448 \\ 0.363 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -0.471 \\ 0.517 \\ 0.659 \\ 0.276 \\ -0.010 \end{pmatrix}
\right|
$$

Characteristic roots *Characteristic vectors*

$$
\begin{pmatrix} 0.906 \\ 0.196 \\ 0.099 \\ 0.011 \\ 0.000 \end{pmatrix}
\qquad
\left|
\begin{pmatrix} 0.276 \\ -0.540 \\ 0.667 \\ -0.217 \\ 0.374 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.304 \\ -0.361 \\ 0.228 \\ 0.645 \\ -0.506 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -0.095 \\ 0.743 \\ 0.452 \\ -0.307 \\ 0.374 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.108 \\ 0.153 \\ -0.474 \\ 0.531 \\ 0.677 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.901 \\ -0.053 \\ -0.272 \\ -0.329 \\ -0.064 \end{pmatrix}
\right|
$$

Characteristic roots *Characteristic vectors*

ويوضح تحليل العناصر الرئيسية (*Principal Component Analysis*) أن هناك عنصـران (first and second principal) كافيان بإعطائنا فكرة كافية عن البيانات حيث أنهما يشاركان بنسبة 96% مـن قيمة التباين المعيارى الكلى بالنسبة للذكور بينما نجد أنهما يشـاركان بنسـبة 94% مـن قيمـة التبـاين

المعيارى الكلى بالنسبة للإناث . وحيث أن العناصر الأخرى تكون مشاركتها فى شرح التباين والتغاير الكلى فى معلمات النموذج المقترح فى حدود 4% بالنسبة لبيانات الذكور ، 6% بالنسبة لبيانات الإناث ، فلا يوجد أى داعى لتفسير تلك المشاركة . والعنصر الأول (*first principal*) يمثل المعلمات θ_1 ، θ_3 ، θ_5 حيث نجد أن له تحميل موجب *Postive loading* كبير على θ_3 وأقل على θ_5 وتحميل سالب *Negative loading* أقل على θ_1 ونلاحظ أن هذا صحيح بالنسبة للذكور وكذلك بالنسبة للإناث ، ويكون التحميل صغير جدا على المعلمات الأخرى ، بينما نجد أن العنصر الثانى (*Second principal*) له تحميل موجب كبير على المعلمات θ_0 ، θ_4 وتحميل موجب صغير بالنسبة للمعلمة θ_3 وتحميل سالب صغير θ_1 ، θ_5 هذا بالنسبة للذكور وللإناث .

٣ - ١ - تأثير قراءة واحدة على إسلوب التقدير :

ولقد تم إستخدام إسلوب مونت كارلو *Momte Carlo* للمحكاة لإستخراج بيانات للنمو ، فبإستخدام بيانات النمو الحقيقية للإنثى وللذكر المختارين فقد نحصل على معلمات النموذج المقدرة $\underset{\sim}{\theta}^*$ وكذلك تباين تقديرى للأخطاء (أو البواقى) $\hat{\sigma}_e^2$. وبإستخدام هذه المعلمات المقدرة تم الحصول على مجموعة من بيانات المحاكاة $\{t , h_t\}$حيث أن النموذج هو $\{h_t= f(t,\underset{\sim}{\theta}^*)+e_t\}$ ، $\{e_t \sim N(0,\hat{\sigma}_e^2)\}$ ، t تأخذ القيم الصحيحة من ٤ حتى ١٨ سنة . ثم قمنا بإعادة توفيق أو تطبيق النموذج على بيانات المحاكاة فحصلنا على مصفوفة تباين وتغاير مقدرة ، ثم تم حساب قيم معلمات النمو التى لنا فيها إهتمام خاص وهى t_0 ، t_2 بالإضافة إلى تبايناتها المقدرة $\hat{\sigma}^2(t_0)$ ، $\hat{\sigma}^2(t_2)$. وعموما تم إيجاد ٣٠ مجموعة بيانات بإستخدام المحاكاه (١٥ مجموعة خاصة بالإناث ، ١٥ مجموعة خاصة بالذكور) وتم تقدير معلمات النموذج بإستخدام بيانات كل مجموعة ، وفى كل مجموعة ولكل قراءة على حدة تم التقدير مرة أخرى بعد حذف تلك القراءة ثم تمت مقارنة تلك النتائج ولقد لاحظنا مايلى:

(١) معظم المعلمات المقدرة ليست حساسة فى معظم الأحوال إلى حذف البيانات التى تمثل بداية أو نهاية البيانات *Endpoints data* أى أنها ليست حساسة لقيم هذه القراءات المتطرفة .

(٢) المعلمات المقدرة تكون شديدة الحساسية للقراءات التى تقع مباشرة قبل وبعد نقط الرجوع *Infliction points* لمنحنى النمو وبالتالى فإن التقديرات تتأثر بشدة إذا حذفت مثل تلك القراءات.

ونخلص من ذلك إلى أن حذف تلك القيم الحساسة أو الحرجة سوف يزيد بشدة من قيم التباينات المقدرة للمعلمات وذلك إذا ماقارنا هذه التباينات بتباينات نفس المعلمات المقدرة عند حذف قيم أخرى غير تلك القيم الحساسة . ولقد وجدنا أن هناك علاقة ارتباط قوية بين المعلمات المقدرة وحجم البواقى التى يتم حذفها . وحيث أن منحنى النمو ليس منحنى خطى ، فإن الارتباط قد يكون سالبا وهذا يعتمد على العمر، وربما يكون الارتباط صغيرا فى مناطق التحول. ونلاحظ أن التأثير الأكبر للبواقى على تقدير المعلمة يعتمد على كلا من القياس والمعلمة المقدرة . وتكون النتيجة النهائية أن تباين المعلمة يكون أكثر حساسية لموقع البيانات عن حساسيته للبواقى نفسها وذلك فى مناطق معينة على منحنى النمو .

٣ – ٢ – تتبع البيانات المؤثرة في تقدير معلمات النمو:

لقد رأينا عددا من العناصر التي قد تؤثر على عملية التقدير الخاصة بمعلمات النمو من بيانات النمو . وقد يتأثر أي نموذج بهذه العوامل ولقد وُجد أن نموذج اللوجستك وبالرغم من كل هذه العوامل يمثل بيانات النمو تمثيل جيد . ولعل محاولة الكشف عن مدى تأثير معلمات النمو يعتبر من المحاولات الهامة حتى نبرهن على مدى إعتمادنا على أساليب تقدير يُعتمد عليها. إن أحدى تفسيرات طريقة جاوس – نيوتن *Gauss-Newton* في توفيق الإنحدار غير الخطي هو أن كل خطوة في فراغ العينة تمثل حل للانحدار الخطي المتعدد. ولقد قمنا بتطبيق بعض من هذه المقترحات لتتبع ولكشف مدى تأثر تقدير معلمات النمو ببيانات النمو ومدى تأثر هذه البيانات في الانحدار الخطي والذي تم تقديمه بواسطة بيلسلي وآخرين *(Belsley, et. al., 1980)* على مشكلتنا غير الخطية . في البداية فإننا نرغب في تعريف بعض البيانات التي لها تأثير فعال على عمليات التقدير ، وهذه البيانات تقوم بعمل الرافعة أو الجذب للبيانات وتسمى هذه العملية "بالرفع أو الجذب" *leverage* . ولتوضيح ذلك فأنه قد توجد بعض القراءات التي تقع بعيدا عن جسم البيانات أو بعيدا عن باقى القراءات الآخرى ويكون لها تأثير مرتفع على عمليات التقدير *High leverage* لوجود تأثير لها على نقل ثقل أو تركيز البيانات إلى جانب غير الجانب المنظور أو المتوقع . فإذا إتفق موقع هذه القراءات مع خط إتجاه القراءات الكلية أو معظم القراءات الكلية فإن هذا سوف يؤدي إلى دقة تقديراتنا . وبالتالي فإنه إذا كان هناك تعارض فإن كلا من موقع *Location* ومقياس أو تدرج *Scale* التقديرات ربما تتأثر بطريقة غير ملائمة بهذه القراءة الوحيدة . لاحظ أن تأثير الرافعة *Leverage* سوف يساعد على

توضيح تأثير الرفع للمشاهدة المقروءة على المشاهدات ولكن يجب أن لا نعتمد فقط على تأثير الرفع فى دراسة تأثير تلك القراءات على عملية التقدير .

في الإنحدار الخطي ($\underset{\sim}{Y} = X \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{e}$) نجد أن المصفوفة

$$A \equiv X(X^T X)^{-1} X^T$$

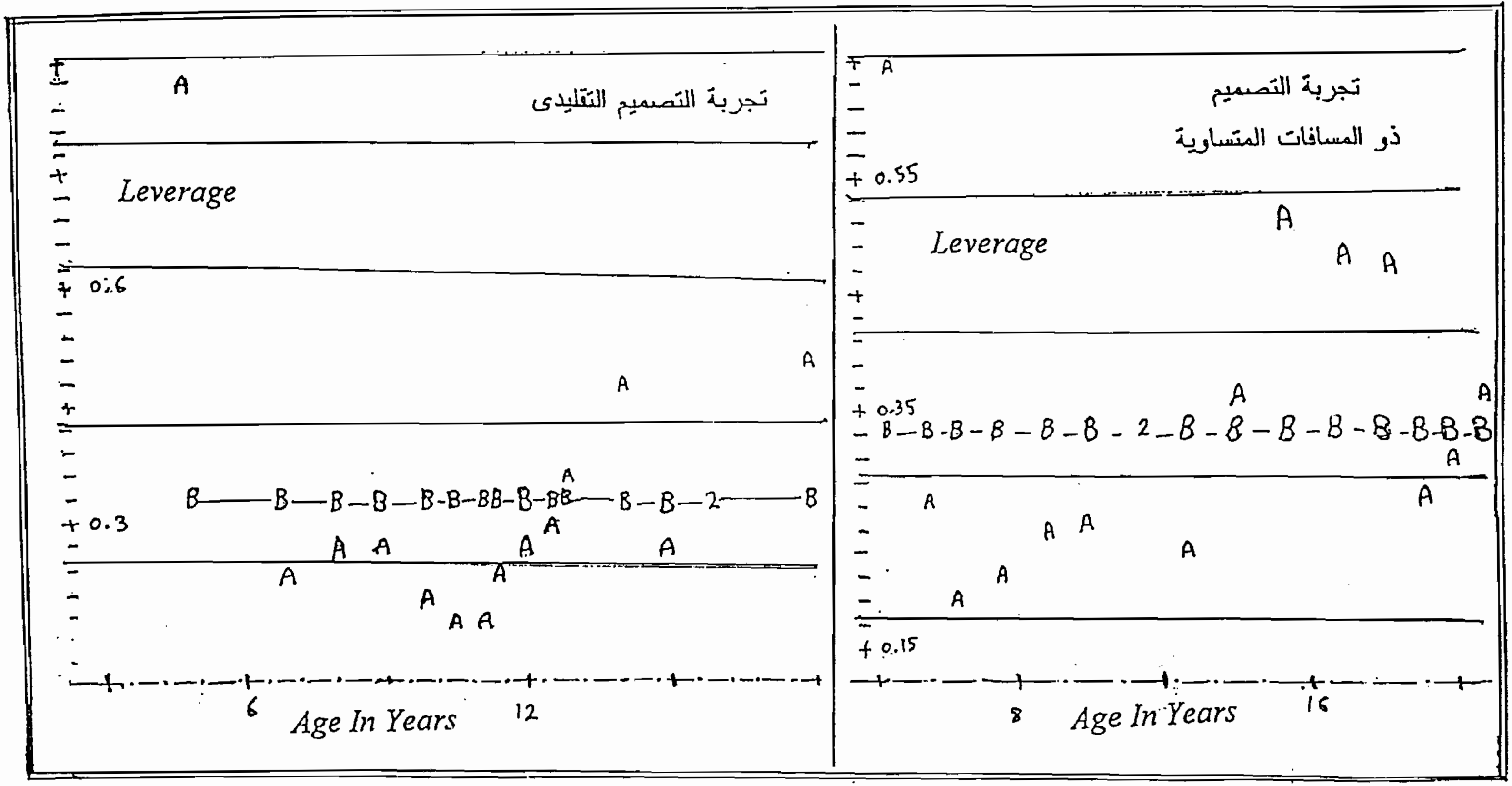
تُسقط خصائص القيم المشاهدة على القيم التي تم توفيقها وحيث أن X عبارة عن مصفوفة ذات رتبة كاملة (*Full ranK*) فإن مجموع عناصر القطر الرئيسي في A يساوي P ويساوي أيضا رتبة *Rank* المصفوفة X . ويكون متوسط حجم العنصر A_{ii} (وهو من عناصر القطر الرئيسى) عبارة عن $\frac{P}{n}$ ، حيث أن n تساوي عدد المشاهدات . فإذا إستعنا بمصفوفة التصميم المركزي $\widetilde{X}$ (*Centered design matrix*) فإننا نجد أن

$$A_{ii} - \frac{P}{n} = \widetilde{X}_i (\widetilde{x}^T \widetilde{x})^{-1} \widetilde{X}_i^T$$

حيث أن $\widetilde{X}_i$ عبارة عن الصف رقم i (*i th row*) للمصفوفة $\widetilde{X}$. هذا التعبير يمثل مسافة معممة *Genarlized distance* ، ويوضح أن عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A يمكن أن تنسب الى المسافة بين قراءة معينة من القراءات وقيمة متوسط القراءات. اما بالنسبة لنموذجنا غير الخطي فاننا سوف نأخذ فيه A بحيث أن ($A=J(J^TJ)^{-1}J^T$) حيث أن :

$$J = \frac{\partial f(\underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{t})}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$$

ولقد لوحظ أن التأثير *Leverage* لا يعتمد على القيمة المقاسة. ويوضح شكل (٢) تأثير كل قراءة لإثنين من التجارب المصممة . وفي التجربة الأولى فإن القياسات تم أخذها بصفة متكررة أكثر خلال فترة النمو السريع وسوف نسميها بالتصميم التقليدى *Traditional design* . أما التجربة الثانية فإنها عبارة عن تجربة تأخذ قياسات ذات مسافات متساوية وسوف نسميها بتصميم المسافات المتساوية *Equally spaced design*. وتم إستخدام نفس المعلمات للحساب في التجربتين وفي كلتا الحالتين كانت (n=15 ، p=5) ونلاحظ أن الخط الأفقي يمثل التصميم المتوازن . ونلاحظ ايضا أن القياس في الاعمار الأولى على غير العادة كان له تأثير رفع أكبر *High leverage* في كلتا التجربتين .



شكل (٢)

أمثلة للرفع فى التصميمات المختلفة لدراسات النمو، وتمثل A الرفع لقراءة معينة، وتمثل B البيانات المتزنة.

وبالمقارنة بالتصميم التقليدي *Traditional design* نجد أن التصميم الآخر (ذو المسافات المتساوية)، إستخدم قياسات أكثر نسبيا في الأعمار الأولى وأقل نسبيا في الأعمار ذات النمو السريع، وينعكس تأثير ذلك في إنخفاض تأثير الرفع خلال الأعمار الأولى أو الصغيرة وزيادة تأثير الرفع خلال فترة النموالسريع فى التصميم ذو المسافات المتساوية، وذلك إذا ما قورن بالتصميم التقليدي .وتكون النتيجة العامة هو أن التصميم ذو المسافات المتساوية يكون تقريبا متوازنا عن التصميم التقليدى. ويجب عدم الإعتماد على تأثير الرفع *Leverage* فقط ، لأنه إذا كان هذا التأثير هو المعيار الوحيد فلا يمكن الإعتماد على أي من التصميمين (أي أنه لا يفضل أي من التصميمين) ، فعمليا نجد أن تأثير الرفع الأعلى يسمح لنا فى بعض الأحيان بتقدير معلمات معينة بسهولة، وفى نفس الوقت يجعل قراءات معينة تؤثر بطريقة غير متوقعة على عملية تقييم وتقدير معلمات النموذج ، وتجعل عملية تطبيق النموذج بل حتى تحديد خصائصه غاية فى الصعوبة .

٣ – ٣ – حساب تأثير حذف قراءة واحدة على تقدير المعلمات :

إن إسلوب الحذف الذي أُتبع (بإستخدام بيانات المحاكاة التى تم الحصول عليها بإستخدام إسلوب مونت كارلو *Monte Carlo*)، هو إسلوب معقول لدراسة تأثير حذف قراءة معينة على تقدير المعلمات. فلقد تم إعتبار الحالة التي يؤثر فيها حذف قراءة واحدة على تقدير معلمة معينة. ولقد ظهرت لنا مشكلة عملية من حيث المجهود الذي يجب أن يبذل للقيام بالعمليات الحسابية نظرا لما تتضمنه هذه العمليات من كميات كبيرة من بيانات المحاكاة التى تستخدم فى ذلك التحليل. وكإقتراح بأن نزيد من دالة الهدف حول الحل الأمثل الكامل بحيث تكون :

$$\phi(\underset{\sim}{\theta}) \equiv \phi(\underset{\sim}{\theta}^*) + (\underset{\sim}{\theta} - \underset{\sim}{\theta}^*)^T \underset{\sim}{g} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\theta} - \underset{\sim}{\theta}^*)^T + H(\underset{\sim}{\theta} - \underset{\sim}{\theta}^*)$$

حيث أن ($\underset{\sim}{g} = -2J^T \underset{\sim}{e}$) وتكون الخطوة التالية نحو تقريب الحل هى أن نعتبر أن :

$$\theta^* - \underset{\sim}{\theta}^*_{(i)} \equiv H^{-1}_{(i)} \underset{\sim}{g}_{(i)}$$

حيث أن (i) تشير إلى عملية حذف المشاهدة (i) وبإستخدام النظرية :

$$(x^T_{(i)} x_{(i)})^{-1} = (x^T x)^{-1} + \frac{(x^T x)^{-1} \underset{\sim}{x}_i^T \underset{\sim}{x}_i (x^T x)^{-1}}{1 - C_{ii}}$$

حيث أن $\underset{\sim}{x}_i$ عبارة عن الصف رقم i من x وكذلك C_{ii} عبارة عن العنصر (i) الموجودة على القطر الرئيسي من مصفوفة الإسقاط *(Projection matrix)* $x(x^Tx)^{-1}x^T$ ، ويكون من السهل إثبات أن :

$$H_{(i)}^{-1}\ \underset{\sim}{g}_{(i)} = \frac{\left(J^TJ\right)^{-1} J_i^T e_i}{1-A_{ii}}$$

حيث أن H عبارة عن مصفوفة نحصل على قيمة تقريبية لها بإستخدام المصفوفة J^TJ. وكذلك فإن A_{ii} عبارة عن عناصر القطر الرئيسي من المصفوفة $J\left(J^TJ\right)^{-1}J^T$ ويمكن استخدام عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $V_{\underset{\sim}{\theta}}$ كأوزان مناسبة في العمليات الحسابية التي يمكن إجراؤها بطريقة تقريبية .

وهناك احتمال آخر أن تستخدم كل التوفيقات الممكنة لمعلمات النموذج فاذا كانت L عبارة عن مصفوفة معرفة وموجبة *Positive definite matrix* فانه لأي $\underset{\sim}{b}$ فإن .

$$\sup_{\underset{\sim}{h}\neq 0} \frac{(\underset{\sim}{h}^T\ \underset{\sim}{b})^2}{\underset{\sim}{h}^T L\ \underset{\sim}{h}} = \underset{\sim}{b}^T L^{-1}\ \underset{\sim}{b}$$

وبأخذ قيمة ($L = V_{\underset{\sim}{\theta}}$ ، $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{\theta}^* - \underset{\sim}{\theta}^*_{(i)}$) وباستخدام النتائج المقربة فاننا نجد أن

$$(\underset{\sim}{\theta}^* - \underset{\sim}{\theta}^*_{(i)})^T V_{\underset{\sim}{\theta}}^{-1} (\underset{\sim}{\theta}^* - \underset{\sim}{\theta}^*_{(i)}) \equiv \frac{A_{ii} e_i^2}{(1-A_{ii})^2}$$

ولتعريف القراءات التطرفة الغير عادية *Unusual datapoints* ، فإننا نقترح إعادة ترتيب الأوزان الداخلية. وحيث أن نصف المدي للبيانات التي تقرب في توزيعها من التوزيع الطبيعي $(75^{th}$ - 25^{th} percetiles) تكون مساوية تقريب ($\frac{3}{4}\sigma$) للبيانات، فإننا نقترح إهمال القراءات التى قيمتها تزيد مرة ونصف عن نصف المدى والتى تقع فى الربع الأخير (أى بعد الربيع الثالث *(75^{th} prcentile)*) . ونخلص من ذلك إلى أنه بإفتراض وجود نموذج مناسب ، فإن إختبار إسلوب التقدير يحتم علينا بإلحاح تطبيق الإنحدار التشخيصى *Regression diagnostics* مباشرة إلى إسلوب توفيق البيانات. ولقد لاحظنا أن هناك بعض البيانات التى لها تأثير رفع كبير *High* *leverage* يزيد عن $\frac{2p}{n}$ ، وهى التى تسبب وجود بواقى كبيرة وغير عادية ، وهذه النقط سبق لنا تعريفها بالقيم ($\frac{A_{ii}e_i^2}{(1-A_{ii})^2}$). ولقد تم أخذ تلك القيم ذات التأثير المرتفع والبواقى فى التحليل معا وكلا على حدة حتى نتمكن من توفير بعض الحماية ضد مثل تلك البيانات ولتحديد مدى تأثير البيانات المختلفة على عملية التقدير.

٤ – إستخدام أسلوب تصميم التجارب

عمليا نجد أن تصميمات التجارب *Experimental designs* فى دراسات النمو الجسمانى يتم إفتراضها بغض النظر عن نوع النموذج المستخدم أو المطبق وأيضا بغض النظر عن القيم التى يتم تقديرها، وقد ينتج عن ذلك الفرض أن التصميمات تكون ليست بالتصميمات المثلى *Optimal designs* وسوف نعرض الآن نتائج يتم الحصول عليها عند استخدام أسلوب تصميم مثالى للتجارب .

٤ – ١ – النتائج النظرية :

إفترض أن لدينا مجموعة S من التجارب الأولية الممكنة بحيث أن كل تجربة سوف نطلق عليها s_i حيث أن التجربة الأولية سوف تحتوى على قياس للطول h_t عند عمر معين t . وبالتالى فسوف يكون التوزيع الخاص بالمتغير h_t لتجربة معينة معتمدا على طبيعة إحتمال الخطأ فى القياس فى المعلمات الخمسة المجهولة $\underset{\sim}{\theta}$. وسوف نرغب فى تقدير معلمة النمو y_j والتى يعبر عنها بالدالة $y_j = g_j(\underset{\sim}{\theta})$ اى أن y_j عبارة عن دالة فى معلمات النموذج . إفترض أننا نريد تصميم تجربة تحتوى على دالة التجارب أو نتائج التجارب المستقلة $\{s_1 ، s_2 ، s_3 ،...، s_n\}$ وليس من الضرورى أن تكون نتائج التجارب n كلها مختلف . فإننا نرغب فى تصميم تجربة تمكننا من الحصول على أفضل تقدير ممكن للدالة $y_j = g_j(\underset{\sim}{\theta})$ لعدد معين من المشاهدات.

فى مثل هذه الأحوال فإن شرنوف *(Chernoff, 1953, 1962)* أوضح بإنه يوجد تصميم مثالى فرضى موضعى والذى يحتوى على خمسة أعمار مختلفة على الأكثر فى كل جزء ، وهذا التصميم يعتمد على مصفوفة المعلومات الخاصة بفيشر *(Fisher's information matrix)* والتى يمثل كل عنصر فيها عن طريق $E\{(\frac{\partial L}{\partial\theta_i})(\frac{\partial L}{\partial\theta_j})\}$ حيث أن L عبارة عن لوغارتم دالة الإمكان الأعظم.

فإذا فرضنا أن$\{e_t \sim N(0\,,\,\sigma_e^2)\}$ فـى نموذجنـا المستخدم $h_t = f(t,\underset{\sim}{\theta}) + e_t$ فـإن مصفوفـة المعلومات يمكن التعبير عنها كـالآتى $\frac{1}{\sigma_e^2}(\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\theta}})(\frac{\partial f^T}{\partial \underset{\sim}{\theta}})$. ولقـد إفترضنـا أن التبـاين σ_e^2 معلـوم وذلك بهدف تحديد التيصميم الأمثل . ويقوم الإسلوب المتبع بتمثيل كل نقطة معينة من قيم العمـر t (ولتكن t^*) عن طريق نقطة معينة بحيث يعبر عن تلك النقطة كالآتى

$$\frac{\partial f(t,\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_i}\Big|_{t=t^*} \quad , \qquad i = 1,2,3,4,5.$$

ويتم تمثيل تلك النقطة فى فراغ ذو خمسة محاور ، يكون كل محور عبار $\frac{\partial f(t,\underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_i}$ وبالتالى فلابد مـن تحويل الفترة الرقمية الخاصة بقيم t *(Interval t-value)* إلى منحنى فى فراغ ذو خمسـة إتجاهـات أو خمسة محاور ، كل محور يمثل تفاضل جزئى خاص بأحد معلمات النموذج ، ثم نقوم بإنشاء مجموعـة محدبة *Convex set* تحتوى على هذا المنحنى وكذلك صورته السالبة (أى صورة المنحنى بعـد دورانـه على المنحنى الرأسى). ولإيجاد أفضل تصميم يمكننا من الحصول على أفضـل تقدير ممكـن للدالـة $y_j = g_j(\underset{\sim}{\theta})$ فسوف نقوم بإكمال المتجه الذى يحتـوى على العنـاصر $\frac{\partial g_i}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$ ، (أى مـده على إستقامته)، حتى يتقاطع مع تلك الفئة أو المجموعة المحدبـة المشـار إليهـا وتكـون نقطـة التقـاطع ممثلـة للتصميم الأمثل (وعلى الرغم من أنه ليس من الضرورى أن تكون قيم $\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$ ، $\frac{\partial g_i}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$ ممثلـة بنفـس وحدات القياس فإن التصميم الأمثل سوف يكون ثابت *Invariant* بالرغم مـن إختـلاف وحـدات القياس) . وإذا كانت تلك النقطة عبارة عن نقطة من النقاط الأصليـة فـإن التصميـم يستلزم تكـرار التجربة n من المرات . أما إذا حصلنا على نقطة مخالفة للنقاط الأصلية فإن نقطة التقاطع هذه تكـون ممثلة للتوافق الخطى *Linear Combination* بين خمسة علـى الأكـثر مـن التجـارب الأوليـة، بنسـب تتوقف على المسافات بين نقطة التقاطع ونقاط التجارب الأولية أو الأساسية، بحيـث تكـون النسـب الأكبر خاصة للمسافات الأصغر (أى أن النسب تتناسب عكسيا مع تلـك المسـافات) وشـكل (٣) يبين كيفية تمثيل هذا الإسلوب بيانيا .

ويمكن الحصول على قوانين إضافية لتصميم هذه التجربة المثالية، عن طريق الإعتماد على حقيقة أن التقريب الكبير للعينة إلى $V_{\underset{\sim}{\theta}}$ يكون عبارة عن نسبة إلى مقلوب مصفوفة المعلومات *Information matrix* ، وتكون مصفوفة المعلومات لتصميم هذه التجربة المثالية عبارة عن نسبة إلى I_{ij} حيث أن

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{5} u_k \frac{\partial f(t_k, \underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial f(t_k, \underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_j}$$

حيث أن u_k تمثل الأوزان النسبية، ويكون التباين لمعلمة النمو للدالة $y_j = g_j(\underset{\sim}{\theta})$ عبارة عن نسبة إلى $V_{y_j} = \underset{\sim}{d}^T I^{-1} \underset{\sim}{d}$ حيث أن $\underset{\sim}{d} = \frac{\partial g_j}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$. ولإيجاد التصميم المثالى لتقدير y_j فلابد أن نقوم بتصغير *Minimize* V_{y_j} كدالة للأعمار الخمسة والأوزان الأربعة (حيث أن الرقم الكلى للمشاهدات يكون رقما ثابتا)، ويجب مراعاة خاصيتين فى هذا الأسلوب وهما : أولا على الرغم من أننا نريد أن نعرف قيم المعلمة المجهولة فى التطبيقات ، فإنه يوجد عادة تضحية بسيطة فى الدقة عندما تكون القيم غير مؤكدة، وثانيا إن التصميم الناتج يجب أن يستخدم كمقياس يمكن عن طريقه الوصول إلى التصميم المنشود . فعلى سبيل المثال على الرغم من أن الإسلوب المستخدم قد يتطلب فقط إعادة واحدة من التجارب الأولية فإن عدد قليل جداً من الإحصائيين يوصون بإستخدامه فى الحياة العملية حيث أن هذا الإستخدام عمليا يتطلب الإعتقاد المطلق فى مثالية النموذج المختار وبفاعليته. كذلك فإن التصميم المثالى ربما يتطلب أيضا بعض الترشيد عندما تهدف الدراسة إلى خدمة عديد من الأهداف فى نفس الوقت .

٤ - ٢ - تطبيق النتائج النظرية إلى نموذج اللوجستك المستخدم :

ولتصميم تجربة مثالية لتقدير معلمة النمو y_j فإنه من الممكن إستخدام خوارزم *Algorithm* (نظام حسابى) للحصول على القيمة المثلى *Optimization* لتصغير *Minimize* التباين كما سبق التعبير عنه سابقا. ولكن قد تظهر بعض الصعوبات، وتقع الصعوبة الأولى عند تحديد القيمة الإفتراضية الأولية لخمسة أعمار وأربعة أوزان لإستخدامها . أما الصعوبة الثانية فتقع فى مصفوفة المعلومات فقد تكون ليس لها مقلوب *Singular* أو قريبة من ذلك *Nearly singular* وذلك إذا كان التصميم المثالى يستخدم لأقل من خمسة أعمار مختلفة أو إذا كان الخوارزم (النظام الحسابى) أقل بخطوة وذلك

لتساوى عمرين من الأعمار المستخدمة تقريبا . أما الصعوبة الثالثة فتكمن فى أن الإختيار يجب أن يكون عليه مجموعة من القيود لأن التباين عبارة عن علاقة نسبية عكسية لكل الأوزان بينما يجب أن تظل الأعمار محصورة بين حدين يتم إختيارهما .

وحيث أن مشكلة التصغير *Minimization* أو التعظيم *Maximization* ليست سهلة ، كما أننا نقوم بتوظيف الأسلوب المستخدم كمرشد أو كخطوط عريضة للإرشاد أو كأسلوب مساعد مع الأساليب الأخرى ، فإننا نحصل على التصميمات المثالية *Optimal designs* لتقدير معلمات النمو t_0، t_2 لخمسة إناث تم إختيارهم عشوائيا من بين العشرة إناث ، وكذلك بالنسبة لخمسة ذكور تم إختيارهم أيضا بطريقة عشوائية من بين العشرة ذكور ، وعند القيام بهذا الأختيار فإنه تم تثبيت عمرين عند نهاية الفترة العمرية المختارة أى عند سن ٤ سنوات ، ١٨ سنة. ثم تم السماح لإختيار الأعمار الثلاثة الأخرى بحيث أن تكون جميع التوافيق الممكنة للأعمار التى قيمها أرقاما صحيحة بين هذين العمرين. وفى توفيق للأعمار تم إختيار مجموعة من الأوزان، هذه الأوزان تضمنت بصفة مبدئية عدد (4^5-3) من التوافيق *Combinations* الممكنة المختلفة للأوزان الخمسة. وحيث أن التباين التقريبى لمعلمات النمو يكون أكثر حساسية للتغيرات فى الأعمار عن التغيرات فى الأوزان . وبالنسبة لبيانات الأنثى التى تمثل متوسط الإناث فى الدراسة السابقة (البلقينى وآخرون 1993) فإنه تم حساب t_0 (وهى سن الإقلاع) ، t_2 (وهى السن فى النهاية القصوى للنمو فى مرحلة المراهقة) ووجد أنهما ($t_0 = 8.89$ ، $t_2 = 10.76$) للإناث، وأنهما ($t_0 = 10.44$، $t_2 = 14.00$) للذكور، وذلك بإستخدام المعلمات المقدرة للنموذج والمذكورة فى جدول (٣). ولقد أمكن الحصول على تللك النتائج عن طريق إيجاد النهاية الصغرى لقيمة V_{y_j} وحتى نستطيع إيجاد التقدير المثالى لقيمة t_0 لهؤلاء الإناث والذكور فإننا أخذنا N من قياسات الأطوال من البيانات المختارة لكل من الذكور والإناث، وكان توزيع هذه الأطوال المختارة للإناث والذكور موزع كالآتى .14N عند السن ٤ سنوات، .40N عند السن ٨ سنوات ، .40N عند السن ١٢ سنة ، .04N عند السن ١٥ سنة ، .02N عند السن ١٨ سنة . أما القيم المختارة لتقدير قيمة t_2 للإناث والذكور فكانت .14N عند السن ٤ سنوات ، .36N عند السن ٨ سنوات ، .36N عند السن ١٢ سنة ، .12N عند السن ١٦ سنة، .04N عند السن ١٨ سنة.

ولقد تم إستخدام التصميمات المثالية للقياس بين قيم t_0 ، t_2 وقبلها وبعدها (حيث تقع نقطتى الرجوع *The two inflection points* فى منحنى النمو) . ونجد أن الفرق بين التصميمات

المثلى لتقدير t_0 ، t_2 عبارة عن إنتقال نسبى من منطقة مشاهدات مكثفة فى الأعمار الصغرى إلى الأعمار الكبرى. وبالنظر إلى بيانات الإناث الأربعة الآخرين وكذلك الذكور الأربعة الآخرين نجد أن النتائج هى نفس الشئ ، وهذه النتائج تتفق مع ماسبق لنا الوصول إليه فى البحث الأول (البلقينى وآخرون 1993) .

وبالعودة مرة أخرى إلى الصيغة الأولية لمشكلة التصميم المثالي ، فإننا نستطيع تبسيط الأمور عن طريق إعتبار أن الاختلافات في معلمات النموذج يمكن تمثيله بصورة جيدة في إتجاهين فى المستوى (أى على محورين) . وحتى يمكن تحديد التصميم المثالي فإننا نحول فترة من الاعمار بين ٤، ١٨ سنه الى منحنى واقع في فراغ ذو خمسة إتجاهات معرف كل اتجاه منها بتفاضل جزئى معين $\frac{\partial f}{\partial \theta_i}$ ، ثم نحول المنحنى الى فراغ ذو إتجاهين بحيث أن الاتجاه الأول يمثل متجه القيم المميزه الأول *First charactoristic vector* والثاني يمثل متجه القيم المميزه الثاني *Second charactoristic vector* والمستخرجين من مصفوفة الإرتباط الخاصة بمعلمات النموذج . ثم نقوم بإنشاء أصغر مجموعة أو فئه محدبه *convex set* للمنحنى وكذلك الصورة السالبة، وتحدد نقطة تقاطع المتجه الذي يمثل معلمة النمو مع تلك الفئة المحدبة ، وشكل (٣) يوضح نتائج إتباع هذا الاسلوب بإستخدام بيانات النمو الخاصة بالاناث.

ونلاحظ أن المنحنى الذي يأخذ شكل S (*S- shaped curve*) في اليسار من شكل (٣) عبارة عن إسقاط لمنحنى مرسوم على خمسة محاور إلى منحنىمرسوم فى اتجاهين يمثلان أكثر الإختلافات والإنحرافات في معلمات النموذج المقدرة من بيانات الفتاة المختارة (ونلاحظ أن المنحنى والاتجاهات الخمسة عبارة عن مجموعة النقاط :

$$\{(\frac{\partial f(t,\tilde{\theta})}{\partial\theta_1},\ldots,\frac{\partial f(t,\tilde{\theta})}{\partial\theta_5}) \quad , \quad 4 \le t \le 18\}$$

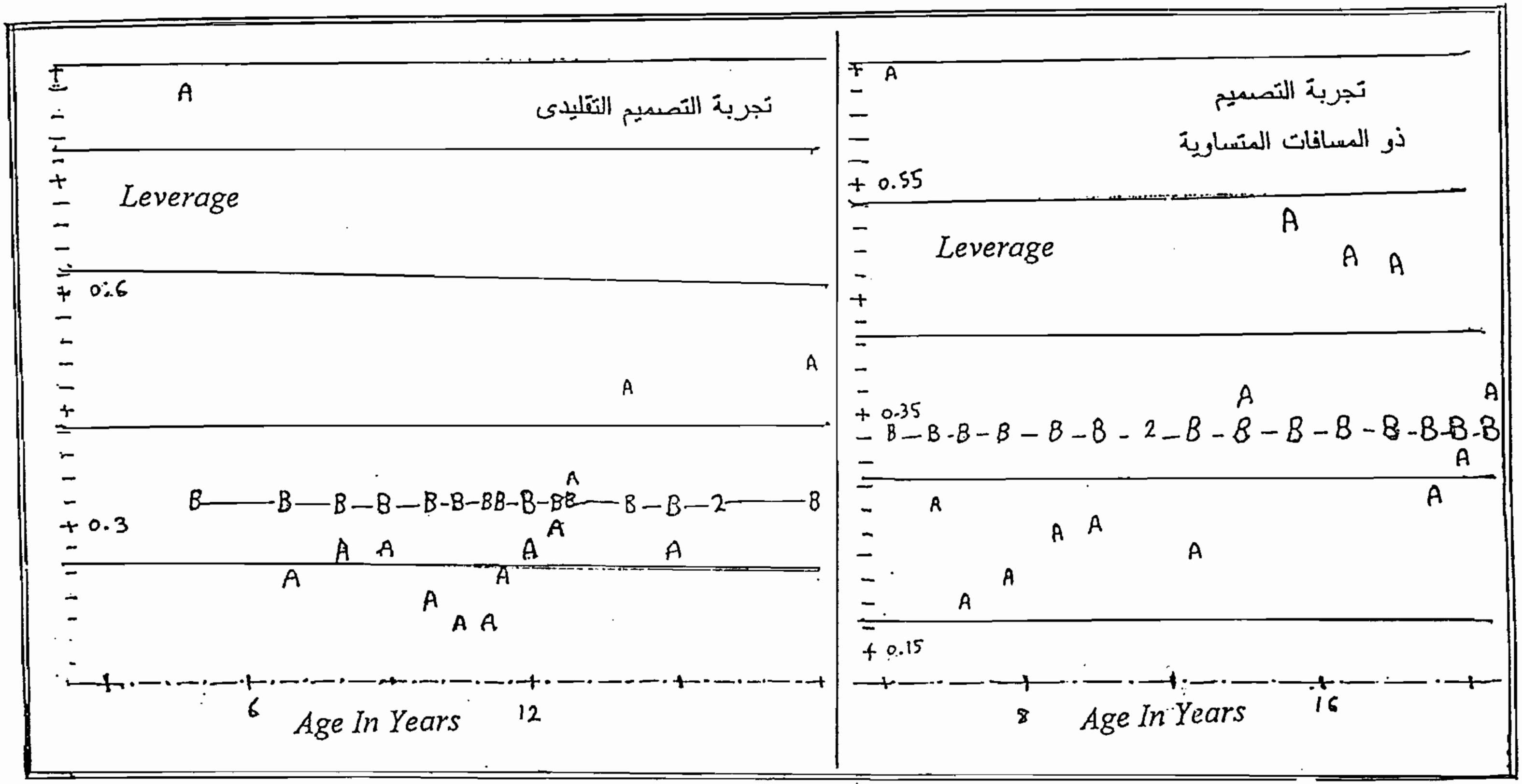
ولقد تم تمثيل تلك النقاط في المستوى الخاص بالتفاضلات الجزئية التي تم أخذها بالنسبة لكل معلمة من معلمات النموذج) . أما المنحنى الذى يقع على يمين الشكل فهو عبارة عن الصورة السالبة للمنحنى الواقع إلى يسار الشكل أو صورة الدوران المنحنى على المحور الرأسى كما سبق أن ذكرنا. ويوضح المنحنى الأيمن من الشكل بعض الأعمار التى تم تمثيلها على المنحنيين. أما تلك الخطوط المستقيمة والتي تصل بين النقاط على كلا من المنحنين، فلقد تم رسمها حتى نحدد أصغر فئة محدبة والتي تحتوي كلا من المنحنين . ويمكن التعبير عن معلمات النمو t_0 ، t_2 كدوال ضمنيه في

معلمات النموذج (أى إفتراض $t_0 = g_0(\underset{\sim}{\theta})$ ، $t_2 = g_2(\underset{\sim}{\theta})$) وبالتالي يمكن إسقاط المتجهات $\frac{\partial g_0}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$ ، $\frac{\partial g_2}{\partial \underset{\sim}{\theta}}$ في اتجاهين ، ثم يتم مدهما حتى تتقاطعا مع الفئة المحدبة . وتكون نقاط التقاطع (وأيضا جميع النقاط على الخط الواصل بينهما) عبارة عن توفيقات خطيه *Linear Combinations* للنقاط المحاطة بدائرة على المنحنى. وبالتالي فإنه يتم استخدام التصميمات المثالية لتقدير t_0 ، t_2 بأخذ قياسات عند العمر ٤ سنوات وكذلك عند عمر قريب من العمر ١٣ سنه . ويمكن تحديد النسب الصحيحة عن طريق معرفة المسافات النسبية من نقطة التقاطع الى النقطتين المحاطتين بدائرة على المنحنى.

وحتى يمكن تقدير t_2 بطريقة مثالية فإننا أخذنا النسبة الأكبر عند العمر الأصغر (الاعمار الاولى)، ولتقدير t_0 بطريقة مثالية أيضا تم أخذ النسبة الأكبر عند العمر الأكبر (الاعمار المتقدمه) أى بطريقة عكسية عن تقدير t_2 . وفي هذا المثال نجد أننا إستخدمنا التصميمات المثلى لقياس الطول عند أصغر الاعمار الممكنة وعند أعمار بعد نقطة الرجوع الثانية بقليل لمنحنى النمو. وتم استخدام التصميمات المثالية لجميع بيانات الإناث والذكور المستخدمين في هذه الدراسة. والحقيقة أن النتائج الموضحة في شكل (٣) تعتبر صحيحة لثمانية حالات من العشرة حالات (خمسة إناث وخمسة ذكور) المختارة للدراسة والتي تم فحصها. أما فى الحالتين الأخريتين فلقد تم إستخدام البيانات عند الأعمار الأولى (الأعمار الصغيرة) وكذلك عند الأعمار الأخيرة فى الدراسة (الأعمار الكبيرة) لأحداها، بينما تم إستخدام البيانات فقط بعد نقطة الإنقلاب الثانية وأيضا البيانات عند الأعمار الكبيرة الممكنة فى هذه الدراسة للحالة الأخرى.

٤ – ٣ – بعض الاعتبارات التي يجب مراعاتها عند وضع التجربة المثالية:

ويمكننا الآن إدماج النتائج التي سبق أن حصلنا عليها عند استعراض الاعتبارات النظرية للتصميم المثالي للمشكلة مع تلك الاعتبارات العملية والتي أُخذت في الاعتبار عند إجراء الدراسة التطبيقية العملية لإسلوب التقدير ، وذلك حتى يمكننا وضع إقتراح عملي يمكننا من خلاله تصميم التجربة المثالية للنمو. فعندما قمنا بعملية تخفيض مشكلة التصميم المثالي من مشكلة تمثل على خمسة محاور الى مشكلة يمكن تمثيلها على محورين كان لابد لنا من الاستعانة بالدراسة النظرية في القياس عند الأعمار الأولى (الصغيرة) الممكنة من عينات الدراسة. ولقد تم استخدام أسلوب مونت كارلو *Monte Carlo* للمحاكاة وذلك لدراسة حساسية النموذج عند حذف بعض البيانات أو



شكل (٢)

أمثلة للرفع فى التصميمات المختلفة لدراسات النمو، وتمثل A الرفع لقراءة معينة، وتمثل B البيانات المتزنة.

القراءات حتى نعرف تأثير ذلك علـــى المعلمات المقدرة. وبعبـارة أخـرى مـاذا يحـدث عندمـا نقـوم بحذف بعض القراءات الفعلية ؟ وماتأثير ذلـك على المعلمـات المقـدرة ؟ خصوصـا لـو كـانت هـذه القراءات التي تحذف من البيانات المتطرفة أى التي تقع عند الأعمار الصغيرة أو الأعمار الكبـيرة أو اذا كـانت تمثـل أصغـر قيمـة أو أكـبر قيمـــة *Endpoints data* ، وبالتـالي مـاهى كفـاءة *Efficiency* النموذج المقترح .

وبـالرجوع الى الدراسـات السـابقة (*Tanner, et. al. , 1976; Largo, et. al.,1978*) وجد أن القياسات تتكرر بصورة أقل عند الأعمار الصغيرة والكبيرة وبالتالي فاننـا نجـد أن القـراءة أو القياس الأول لابد أن يؤخذ بكل دقة أويجـب علـى البـاحث او المتحـري ان يقـوم بايجـاد أو ترشـيد اسلوب متماثل للقياس قبل القيام باجراء التجربة. أما بالنسبة لمعلمات النمو المقـدرة والـتي لابـد مـن القيام بفحصها ، فإن تصميم التجارب المثلى يكون هاما للقياس عنـد الأعمـار الـتي تقـع قبـل وبعـد نقطتى الرجوع *Inflection Points* وكذلك تلك النقاط التي تقع بين هاتين النقطتين.

وتوفر دراسة الحساسية باستخدام إسلوب مونت كارلو *Monte Carlo* لنا شاهدا عمليا يؤيـد هذه التوصيات ، فعمليا فانه يتم قياس أطوال الأطفال بصفـة أكـثر خـلال فـترة المراهقـة. ولاتعطـى أيـــة عناية خاصة لفـترة الطفولة (أى الأعمار الصغيرة) أو لفترة نهايـة المراهقـة (أى أكـبر الاعمـار لعينة الدراسة) . ولقد لاحظنا أننا نحتاج الى أخذ القياسات خلال هذه الفترة لتحديد نقطتى الرجوع *Two Inflection Points* لمنحنى النمو. ومن الممكن أن أهم مشكلة عملية تواجه البـاحث في هـذه الدراسة هى أنه اذا كان لدينا بيانات طولية فان قيم معلمات النموذج (كذلك قيم نقطتى الرجـوع) لاتكون معروفة بشكل واضح في الفترة الأولى من الدراسة الطولية. والمعلمات التي يمكن تقديرهـا في ذلك الوقت لن تساعد أو لن تفيد لأن التباين سوف يكون كبيرا بطريقة غير مناسبة .

وعلى الرغم من أن معلمات النمو هى عبارة عن دوال ضمنية من معلمـات النمـوذج، بحيـث ان كل منها عبارة عن دالة مختلفة، فمثلا على الرغم مـن أن معلمـات النمـو t_0 ، t_2 تعتمـد أساسـا على معلمات النموذج θ_3 ، θ_4 ، θ_5 فقط. فإننا نجد أن معـدل أو سـرعة النمـو (عجلـة النمـو) V_0، V_2 تعتمد على تقدير المعلمة θ_2 والـتي تعتمـد بدورهـا على المعلمـات θ_0 ، θ_1 وبالتـالي سوف يكون الفرد متردد في التوصية بتجربة مثالية لمعلمة نمو بعينهـا حيـث أننـا نهتـم أساسـا بتقدير مجموعة من معلمات النمو في نفس الوقت من بيانات النمو .

٤ – ٤ – إستخدام إسلوب مونت كارلو *Monte Carlo* لمقارنة التصميمات المختلفة :

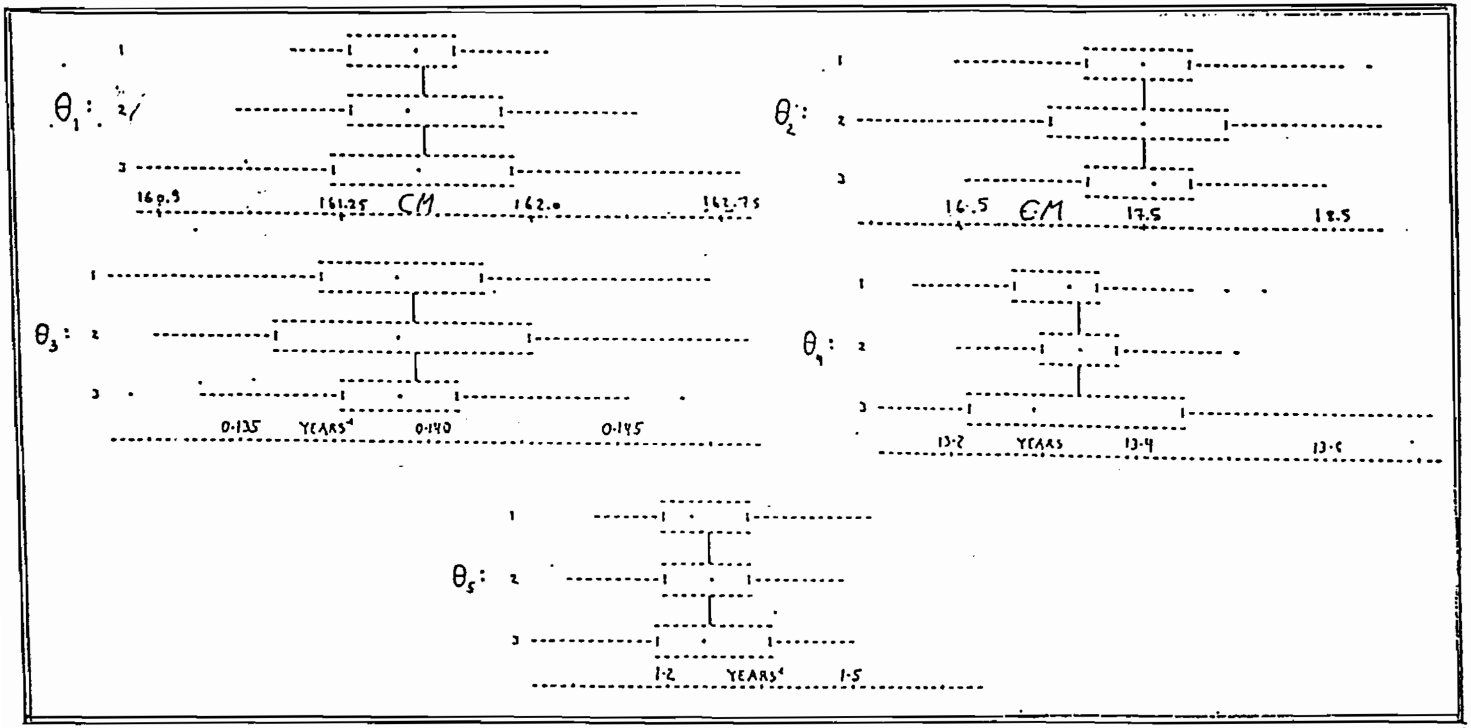
سوف نقوم الآن بمقارنة ثلاثة تجارب مختلفة وذلك بإستخدام إسلوب مونت كارلو وهذه التجارب الثلاثة هي :

١- التجربة الأولى وهى تقوم على اساس أخذ قياسات للاعمار على أبعاد متساوية من عينة الدراسة (تجربة المسافات المتساوية) ، وهذه التجربة تكون سهلة التطبيق وتصف البيانات في نهاية كل فترة كما تمكننا من إختيار القياسات بالقرب من قياسات التصميم أو التجربة المثالية (خصوصا في الأعمار التي تمثل نهاية فترة الطفولة)، كما تسمح لنا بتقدير جميع معلمات النموذج بدقة .

٢- التجربة الثانية ونسميها تجربة التصميم العادي أو التقليدي ، وهذه التجربة تهتم بالقياسات خلال فترة النمو السريع خلال فترة المراهقة كما تهتم بقياسات لأعمار أصغر خلال فترة الطفولة ، وكذلك في نهاية فترة المراهقة (أى في نهاية فترة النمو السريع) .

٣- التجربة الثالثة وهى تجربة التصميم المثالي : وهذه التجربة تهتم بتقدير جميع معلمات النمو ، وهذه التجارب المثالية تكون مختلفة فيما بينها ، ولذلك فإننا سوف نقوم بتصميم مثالي لإختيار t_0 (وهو السن عند الاقلاع *take -off*) وهذا التصميم المثالي المختار سوف يكون عبارة عن التجربة المثالية . ويمكن ترشيد التصميم المثالي حتى يشمل أكثر من خمسة أعمار مختلفة حتى يسمح لنا بتقارب في الاسلوب الحسابي المستخدم في التوفيق.

وبإستخدام البيانات الخاصة بالانثى والذكر المختار بياناتهما ، فانه تم إستخدم إسلوب المحاكاة لتوليد *Generate* خمسين مجموعة بيانات يمثل كل منها بيانات نمو لفتى واحد أو فتاة واحدة كما سبق أن ذكرنا فيما سبق . ولقد تم تطبيق النموذج ذو الخمسة معلمات وكذلك تم إيجاد معلمات النمو t_0 ، t_2 وكذلك قيم معدلات النمو V_0, V_2 وأخيرا يتم حساب قيم الأطوال (h_2 , h_0) لهذه البيانات كما تم حساب بيانات تقريبية لكل منها وشكل (٤) يوضح مقارنات بين التجارب الثلاثة بإستخدام إسلوب "*Boxptots*" لقيم مونت كارلو *Monte Carlo* الخمسين لكل نموذج ولكل معلمة نمو. ولقد لاحظنا أن المعلمة المقدرة غير متحيزة "*Unbaised*" لكل الحالات ولكن بيانات المعلمات تكون مختلفة جدا في التجارب المختلفة. ولقد تم حساب التباين للمعلومات المقررة بإستخدام بيانات المحاكاه لكل معلمة ولكل تجربة ووجدنا أن الكفاءة النسبية لكل تجربتين يقاس بنسبة تباينهما ، ولقد تم استخدام القيمة الوسيطية *Midian Values* للبيانات الخمسين لحساب الكفاءة النسبية لكل تجربتين .



شكل (٤)

مقارنة معلمات النموذج للتجارب الثلاثة بإستخدام بيانات المحاكاة (خمسين مجموعة) ، حيث أن 1= تجربة المسافات المتساوية ، 2= التجربة التقليدية ، 3= التجربة المثالية . ويمثل الخط الرأسى بين الرسومات البيانية القيم الحقيقية للمعلمات .

ولقد تم قياس الكفاءة الخاصة بالتجربة الأولى (تجربة المسافات المتساوية) وكذلك تم قياس الكفاءة الخاصة بالتجربة المثالية (تجربة التصميم المثالي) والخاصة بتقدير t_0 وتم نسب كل منها إلى تجربة التصميم التقليدي ، ولقد تم عرض الكفاءة الخاصة بالتجربة الأولى والخاصة بتصميم المسافات المتساوية وكذلك التجربة المثالية الخاصة بتقدير t_0 كنسبة إلى التصميم التقليدي في جدول (٤) وذلك بإستخدام بيانات المحاكاة .

جدول (٤)

Parameters	(1) EXP(!)	(1) EXP(3)	(2) EXP(!)	(2) EXP(3)
θ_0	2.31	0.67	1.79	0.63
	(2.36)	(0.69)	(1.75)	(0.62)
θ_1	1.92	2.56	1.34	1.67
	(1.95)	(2.53)	(1.36)	(1.69)
θ_3	1.79	1.86	1.54	1.90
	(1.69)	(1.84)	(1.51)	(1.92)
θ_4	0.57	0.24	0.76	0.25
	(0.59)	(0.23)	(0.79)	(0.23)
θ_5	0.79	0.48	0.95	0.61
	(0.83)	(0.49)	(0.98)	(0.63)
t_0	0.89	1.73	1.05	1.85
	(0.88)	(1.34)	(1.09)	(1.81)
t_2	0.61	1.14	0.73	1.13
	(0.63)	(1.15)	(0.76)	(1.09)
v_0	0.85	1.25	0.96	1.35
	(0.86)	(1.29)	(0.99)	(1.36)
v_2	0.51	0.28	0.72	0.35
	(0.53)	(0.31)	(0.73)	(0.36)
h_0	1.23	1.89	1.23	1.69
	(1.24)	(1.85)	(1.23)	(1.94)
h_2	0.79	0.86	0.91	1.14
	(0.78)	(0.89)	(0.89)	(1.12)

ويوضح العمودين الأول والثانى من جدول (٤) الكفاءة النسبية للتجربتين بإستخدام متوسط التباينات المحسوبة للمعلمات المقدرة من بيانات المحاكاة (٢٥ مجموعة بيانات خاصة بالإناث ، ٢٥ مجموعة بيانات خاصة بالذكور) أما العمودين الثالث والرابع فيوضحان الكفاءة النسبية للتجربتين ولكن بإستخدام تباين القيمة الوسيطية لبيانات المحاكاة وذلك أيضا لبيانات الذكور والإناث ، ولقد

أطلقنا على تجربة تصميم المسافات المتساوية - EXP(1) ، بينما أطلقنا على تجربة التصميم المثالى لتقدير t_0 ـ EXP(3) ، كما نلاحظ أن القيم بين الأقواس فى الجدول تعبر عن الكفاءة النسبية الخاصة ببيانات الإناث . ولقد تم تقدير معلمات النموذج وعلى الرغم من أن ثلاثة من معلمات النموذج تم تقديرها بدقة أكثر وإثنان بدقة أقل بإستخدام تصميم المسافات المتساوية عن حالة إستخدام التصميم التقليدي ، إلا أننا وجدنا أن تصميم المسافات المتساوية كانت تقديراته أقل فى الدقة عن التصميم التقليدى وذلك فى خمسة من المعلمات السته للنمو . أيضا نجد أنه بينما تم تقدير ثلاثة من معلمات النموذج بدرجة أقل فى الدقة عند إستخدام التصميم المثالى لتقدير t_0 عن حالة إستخدام التصميم التقليدى، فلقد وجد أن التصميم المثالى لتقدير t_0 كانت تقديراته بنفس دقة تقديرات التصميم التقليدى (إن لم تكن أفضل) عند تقدير خمسة معلمات من بين معلمات النمو الستة . ولقد لاحظنا أن التصميم المثالي لتقدير قيمة t_0 كانت كفاءته تقريبا ضعف كفاءة التصميم التقليدي في تقدير قيمة t_0 ، h_0 . وعموما فإن التصميم المثالي نظريا يمكن حسابه لتقدير بقية دوال إختيارية لمعلمات النموذج، ويمكن مقارنة التصميمات المختلفة فيما بينها ، وأيضا يجب المقارنة بينهم وبين التصميم المثالي لإيجاد كفاءة كل تصميم. ومن الممكن أن نجد تصميم معين يمكننا من خلاله تقدير معلمات النموذج بكفاءة، ولكن تكون كفاءته منخفضة عند تقدير معلمات النمو والعكس صحيح. والأسلوب المستخدم هنا يُمكن المتحري أو الباحث أن يستخدم جميع المصادر الممكنة والأساليب الممكنة لمحاولة أيجاد تصميمات لتجارب فعالة .

٥ – التفسير البيولوجى لمعلمات نموذج اللوجستك والخلاصة:

لقد استخدم هذا النموذج أساسا لوصف البيانات الخاصة بالنمو الجسماني ولقد تم استخدام بيانات النمو لمحافظة الدقهلية والسابق الاشارة إليها في البحث وبدلا من استخدام تلك البيانات بإسلوب وصفي حتى نستطيع وصف المجتمع المسحوب منه عينه الدراسة فإننا نرغب الآن بأن ننسب معلمات النمو (القيم المحسوبة للمعلمات البيولوجية) وكذلك منحنيات النمو ومنحنيات سرعة النمو إلى معلمات النموذج بهدف تفسير التوزيع المشاهد لمعلمات النموذج حتى تزيد من معلوماتنا وفهمنا لعملية النمو الجسماني . ولتفسير معلمات النموذج سوف نقوم بعرض التعبير الخاص للطول التقديري $\hat{h}_t$ وكذلك معدل النمو التقديرى (عجلة النمو) $\hat{V}_t$.

$$\hat{h}_t = \theta_1 - \frac{(\theta_1 - \theta_0)}{\exp\{\theta_3(t-\theta_4) + \exp(\theta_5(t-\theta_4))\}}$$

$$V_t = \frac{(\theta_1 - \theta_2)[\theta_3 \exp(\theta_2(t-\theta_4)) = \theta_5 \exp(\theta_5(t-\theta_4))]}{[\exp(\theta_3(t-\theta_4)) + \exp(\theta_5(t-\theta_4))]^2}$$

جدول (٥)

Parameters	$\frac{\partial}{\partial\theta_1}$	$\frac{\partial}{\partial\theta_2}$	$\frac{\partial}{\partial\theta_3}$	$\frac{\partial}{\partial\theta_4}$	$\frac{\partial}{\partial\theta_5}$
t_0	0.00 (0.00)	0,00 (0,00)	0.14 (0.16)	1.00 (1.00)	0.02 (0.01)
t_2	0.00 (0.00)	0,00 (0,00)	-0.11 (-0.06)	1.00 (1.00)	0.02 (0.01)
v_0	0.00 (0.00)	2.34 (2.36)	1.89 (1.98)	0.00 (0.00)	-0.08 (-0.06)
v_2	0.00 (0.00)	3.58 (3.61)	0.49 (0.51)	0.00 (0.00)	0.21 (0.18)
h_0	1.00 (1.00)	-1.69 (-1.56)	-0.19 (-0.13)	0.00 (0.00)	0.01 (0.01)
h_2	1.00 (1.00)	-0.72 (-0.68)	-0.21 (-0.19)	0.00 (0.00)	0.03 (0.02)

ولقد تم دراسة مدى حساسية المعلمات الستة الخاصة بالنمو بالتغير في معلمات النموذج المقدرة وتم عرض ذلك في الجدول (٥)، ولقد تم أخذ التفاضلات الجزئية وتم التعويض بقيمة المعلمات وهى عبارة عن قيم متوسطة للمعلمات سواء الخاصة ببيانات الذكور أو بيانات الإناث والتى توجد بداخل الأقواس فى الجدول . ويمكن تفسير معلمات النموذج بمعلومية منحنى النمو ومنحنى سرعة النمو ونستطيع إجمال هذا التفسير فيما يلي :

١- θ_1 تمثل الطول عند سن النضوج *Adult hight* .

٢- θ_2 عبارة عند الفرق بين الطول عند سن النضوج θ_1 والطول عند السن المبدأي θ_0 والذي يتم استخدامها كعينة أولية لتقدير معلمات النموذج . فمثلا بمعلومية θ_1 يمكن القول بأن الأنثى أو الذكر الذي تكون θ_2 له قيمة أكبر يكون طوله أقصر في خلال فترة الطفولة .

٣- θ_4 عبارة عن معلمة موقع تتوقف بدقة على الأعمار التي يحـدث عندهـا الأحـداث البيولوجيـة الحساسة .

٤- وبمعلومية قيمة θ_2 فإن سرعة النمو خلال مرحلة الطفولة وكذلك المعدل الذي يتغير عنده هذه السرعة يتم انعكاسها بصورة مبدئية في قيمة θ_3 .

٥- .بمعلومية θ_2 ، فإن قمة السرعة خلال فترة المراهقة وطول الفترة التي يحدث عندها أقصى سرعة للنمو تنعكس في قيمة θ_5 مبدئيا .

وهذا التفسير يتفق مع التفسيرات الخاصة بالبحث السابق (البلقيني وآخريـن 1993) كذلـك يتفـق مع إشتقاق هذا النموذج لتمثيل بيانات النمو بواسطة بريز وبانيز (*Preece & Baines*) وعموما فـإن معلمات النمو t_0 ، t_2 تمثل نقاط ثابتة لمنحنى سرعة النمو وهى عبارة عن الحل لمعادلة من الدرجـة الثالثة والتي يكون لها جذور حقيقية (*real roots*) فقط إذا كانت θ_3 تحقق الشرط التالي :

$$\theta_3 \le (3 - 2\sqrt{2})\theta_5 \equiv .17\theta_5$$

وسوف نقوم بإختيار الفرض الإحصائي

$$H_0 : K \equiv .17\theta_5 - \theta_3 > 0 \qquad \text{vs}$$
$$H_A : K \le 0$$

وذلك بإستخدام قيمة المعلمات للنموذج والتي تم اسـتخدامها لتقدير معلمـات النمـو وكذلـك قيـم التباينات المقدرة. وبعبارة أخرى فإننا قمنا بإختبار ما إذا كانت البيانات تؤيد وجود أقصى نمو سريع في فترة المراهقة. ولقد تم عمل هذا الاختبار لبيانات العشرة إناث والعشـرة ذكـور (عينـة الدراسـة). وتم قبول الفرض في ١٩ حالة من الحالات العشرين عند مستوى معنويـة (α =1%) عندمـا قدرنـا مصفوفة التباين والتغاير لمعلمات النموذج V_θ بحيث أن :

$$V_{\underset{\sim}{\theta}} = \hat{\sigma}^2_e H^{-1}$$

وكان الرفض مرة واحدة . ولكن عندما قدرنا مصفوفة التباين والتغاير لمعلمات النموذج بحيث أن

$$V_{\underset{\sim}{\theta}} = 4\hat{\sigma}^2_e H^{-1} J^T J H^{-1}$$

كان القبول لستة عشرة حالة أي كان الرفض لأربعة حالات . فإذا أعتبرنا أن V_{k1} عبارة عن التباين المقدر للقيمة K بإستخدام الطريقة الأولى في تقدير مصفوفة التباين والتغاير ، وإفتراض أن V_{K2} عبارة عن التباين المقدر باستخدام طريقة التقدير الثانية ، وإفتراض أن

$$Z = \frac{V_{K1}}{V_{K2}}$$

وبإستخدام بيانات الإناث والذكور العشرين فإنه يمكننا تقدير قيمة توزيع Z كما فى جدول (٦) . ونجد أن القيمة المتوقعة للمتغير Z أقل من الواحد الصحيح بطريقة واضحة في حالة الذكور أو الأناث وهذا يعطينا مؤشر أو دليل على أن التباين المقدر يمكن اختياره بحيث يؤثر فى النتائج الخاصة بتحليل البيانات . وعموما يمكن القول بأنه لابد من الدراسة العملية والتطبيق العملي للبيانات على النموذج حتى يمكننا تحديد التقديرات المفضلة .

جدول (٦)

Percentile	Male (Female)
5^{th} pecentile	Z = 0.44 (0.53),
25^{th} pecentile	Z = 0.74 (0.64),
50^{th} pecentile	Z = 0.85 (0.86),
75^{th} pecentile	Z = 0.94 (0.92),
95^{th} pecentile	Z = 1.61 (1.52).

الخلاصة : ونخلص من هذه الدراسة بأن نموذج اللوجستك يعتبر نموذجا مناسبا لبيانات هذه الدراسة حيث أظهر توفيق جيد للبيانات من سن السادسة حتى سن الثامنة عشرة وإذا نظرنا إلى التحيز الذي ظهر لهذا النموذج نجد أنه ضئيل جداً إذا ما قورن بقياسات الخطأ فى اللإبحاث السابقة. وحيث أن الهدف من هذا البحث هو التحقق من متانة أو صلابة *Robustness* الإسلوب المستخدم فى التقدير وكذلك مدى متانة وكفاءة النموذج المستخدم فإننا نوصى بالآتى :

١- يمكن الحصول على معلمات نمو دقيقة ومحسنة بإستخدام تصميم تجارب مثالية. ولقد تم عرض بعض الأساليب التي نستطيع من خلالها تحديد وتصميم تلك التجارب المثالية نظريا للإستخدام في تقدير معلمات النمو .

٢- الاسلوب الحقيقي للتقدير يمكن استخدامه بطريقة أكثر متانة وصلابة (*More rebust*) بتطبيق الانحدار التشخيصي إلى الاسلوب المطبق ، والذي يسمح لنا بمتابعة المشاهدات المستخدمة والبيانات التي تؤثر في تقدير البيانات .

٣- بالإضافة إلى الوصف البسيط للمجتمع المسحوب منه العينة فإن عملية نمذجة معلمية يمكن أيضا أن تضيف وضوح أكبر إلى الطريقة الديناميكية للنمو .

ويمكن الإشارة إلى أنه أيضا مازال هناك نقاط مفتوحة للبحث كمحاولة تطبيق النموذج المقترح لتوفيق بيانات النمو فى الأعمار الأولى للنمو ، أيضا قد يكون من المفيد إستخدام الأساليب الموجودة فى البحث وتطبيقها على بيانات نمو أخرى ومقارنة النتائج بالتحليلات التى تم عرضها فى هذا البحث . أيضا يمكن دراسة معلمات النموذج دراسة أوسع عن طريق محاولة إيجاد توفيقات خطية بينها *Linear combinations* لمحاولة وصف وتفسير شكل منحنى النمو وقد يفيد ذلك فى القيام بإختبارات إحصائية أكثر على النموذج المستخدم .

6 - Referances

Barlow, R., E., (1965), and Frak Proschan., Mathematical Theory of Reliability , New York , John Wiley .

Belsely , D., Kuh, E., and Welsch, R., (1980), Regression Diagnostics: Identifying Data and Sources of Collinearity, New York ,Wiley .

Bock, D., R., Petersen, W., H.,A., and Roche, A.,(1973) , "A parameterization For Individual Human Growth Curves", Humam Biology,Vol.45,No.1, University Press, PP . 63-80 .

Brownlee,K.A.,1960, Statistical Theory and Mathodology in Science and Engineering, John - Wiley : New York .

Chernoff, H., (1953), "Locally Optimal DesignFor Estimating Parameters", Annals Of Mathematical Statistics, 24, pp586-620.

Chernoff, H., (1962), "Optimal Design Of Experiments", Technical Report No 82, Applied Mathematics and Statistics Laboratories, Stanford University.

Cornell , R.G., and Spekman, J., a., (1965), "Estimation For a One - Parameter Exponential Model", J.of American Statistical. Asso.,Vol. 60, PP . 560-572 .

Curtis,F. Gerald.,(1978), Applied Numerical Analysis , Addison-Wesley Publishing Company Inc .

Dixon, W., J., and Massey, F., J., (1983), Introduction To Statistical Analysis , Mc. Graw-Hiil.Inc , .

Draper,R.,N.,and Smith,H.,(1966), Applied Regession Analysis , New York : John-Wiley and Sons,Inc,PP.263-299 .

El-bolkiny, M., T., El-mehlawy, M., T., and Takiah, E., A., (1993), "Statistical Analysis For The Physical Growth curve : an Imperial Study" (Accepted For Publication In The Scientific Journal, Faculty of Commerce, Tanta University).

Hogg, R.,V.,and Craig,A.T., (1978), Introduction To Mathematical Statistics , Mac Publishing Co,Inc , New York .

Johnson , R.H., and Wichern,D.w., (1982), Applied Multivariate Statistical Analysis , Hall Englewood Cliffs .

Hartley, H.O. and A.Booker., (1966), " Non - Linear Least Squares Wstimation", Annals Of Mathematical Statistics, Vol. 36, PP. 638-650 .

Khalil , I., F., (1988) , Community Medicing For Medical Student , Cairo University , PP . 85-105 .

Kleinbaum , G.,D.,and Kupper , L.X., (1978), Applied Regression Analysis and Other Multivariable Methods , Hall Englewood Cliffs : Prentic-Hall.Inc .

Koutseyiannis,A., 1973, Theory of econometrics , Mac-Milan : New York .

Largo, R.H., and Gasser, (1978), T.H.Prader., "Analysis of The Adolescent Growth Spurt Using Smoothing Spline Functions", Annals Of Human Biology, Vol. 5, PP . 421-434 .

Mood , A.,M., and Graybill , F.A., (1974) , Introduction To The Theory of Statistics , 3rd Ed, Mc.Graw - Hill . Inc , PP . 271-331 .

Preace, M.A., and Baines, M.J., (1978), "A new Family of Mathematical Models Describing The Human Growth Curve", Annals Of Human Biology', Vol.5, No.1, PP.1-24

Rand, W., M.and Waternaux, C., M., (1978), "Robustness Considerations in The Fitting of Models To Growth Data", Joint Statistical Meeting , San Diago ,CA.

Row, C., R.., (1965), "The Theory of Least Squares When The Parameters and Stochastic and Its Application To The Analysis of Growth Curves" Biometrika", Vol. 52, PP. 109-126 .

Sato, H., (1982), "Normality Hypothesis On The Linearized Model of Human Growth". True Math., Vol 18 , #1, pp 73-77.

Scott, R., B., (1975) , Price & Textbook of Practice of Medicine , Press : Oxford University , PP . 379-384 .

Seber , G., A., (1977), Linear Regression Analysis, New York , John Wiley .

Sweed, F.,S., (1943), and C.Eisehart., "Tabels For Testing Randomness of Growping in a Sequence of Alternatives", Annals Of Mathematical Statistics ,Vol, 14 , PP. 66-87 .

Takiah, E., A., (1992), " Statistical Model To Investigate The Natural Growth With application On The Dakahlia Governorate" , Master Thesis , College of Commerce , Mansora University (In Arabic) .

Tanner, J.M., and Whitehouse.R.H., (1976) ,"The Adolescent Growth Spurt of Boys and Girls of Harpenden Growth Study", Annals Of Human Biology, Vol. 3, No. 2, PP. 109-126 .

Watson , G., S., (1955) , "Serial Correlation in Regression Analysis", Biometrika, Vol. 42, PP. 327-341 .

Young , D., A. , and Corey, E. T. , (1990), "Lattice Model Of Biological Grows"., Physical Review, Vol. 41, #12 pp 7024-7032.