إستخدام نموذج حاصل الضرب ذات المتغيرات المتعددة فى تقدير عدد المطالبات لتأمين السيارات

بحث مقدم من

د/ السباعى محمد السباعى الفقى

المدرس بقسم الرياضة والتأمين

كلية التجارة جامعة القاهرة

تقديم :

يمكن إستخدام نموذج حاصل الضرب Multiplicative Model في تقدير المطالبات فى تأمين السيارات . وذلك عن طريق تقدير المعالم الغير معروفة للمجتمع من خلال بيانات أو مشاهدات سابقة يتم الحصول عليها من شركة التأمين حيث يفترض هذا النموذج أن المتغيرات المؤثرة على المطالبات مثل السن ، ونوع السيارة .... الخ تؤثر فى مجملها على الناتج النهائى بأسلوب الضرب . فلو رمزنا لعدد المطالبات بالرمز ط ، والسن كمتغير يؤثر فى عدد المطالبات بالرمز س ، ونوع السيارة كمتغير آخر بالرمز ص ، ..الخ فيمكن أن نصل إلى الصياغة الرياضية الآتية : أن ط = د (س × ص × ..الخ) وذلك بإستخدام نموذج حاصل الضرب . مع العلم بأن إحدى الدراسات قد أظهرت أن العمر ونوع السيارة لهما علاقة قوية بمعدل وقوع الحوادث [1] وبالتالى المطالبات فإذا كان السن يؤثر على هذه النسبة (معدل المطالبات) المرادتقديرها فى حدود ٥٪ وكان نوع

(١) على السيد الديب ، تسعير التأمين التكميلى للسيارات الخاصة فى ج .م . ع وفقا للعوامل المؤثرة فى درجة الخطر ، رسالة دكتوراه مقدمة إلى قسم الرياضة والتأمين ، كلية التجارة ، بجامعة القاهرة . سنة ١٩٩٢ ، ص ١٢ ، ٢٠

السيارة يؤثر فى حدود ٢٠٪ ، ....الخ ، لكان لوغاريتم النسبة النهائية ولتكن ع فى ظل نموذج حاصل الضرب كما يلى :

[لو ٫٠٥ + لو ٫٢٠ + ...الخ] = رقم معين هو ن .

$\therefore$ لو$_{١٠}$ ع = ن (كما سبق) ،

$\therefore$ ع = ١٠^{ن} .

، ع هى النسبة النهائية أو المعدل للمطالبات التى لو ضربت فى عدد وثائق التأمين لأمكن تقدير عدد المطالبات .

* الهدف من البحث :

يهدف هذا البحث إلى صياغة نموذج رياضى بأسلوب حاصل الضرب للمتغيرات التى تؤثر فى عدد مطالبات السيارات وذلك لتقدير المعالم الغير معروفة ، والتى تفيد فى تقدير عدد المطالبات مستخدمين فى ذلك المقياس الإحصائى المربعات الصغرى المرجحة Weighted Least Squares .

* الصياغة الرياضية للنموذج :

بفرض أننا حصلنا على بيانات سابقة من شركة تأمين بخصوص عدد وثائق التأمين وعدد المطالبات ، والتى نعبر عنها بالرموز من خلال الجدول التالى:

العمر	عدد وثائق تأمين السيارات		عددالمطالبات	
	للسيارات نوع (أ)	للسيارات نوع (ب)	للسيارات نوع (أ)	للسيارات نوع (ب)
أكبر من ٢٥ سنة	A	B	C	D
أقل من ٢٥ سنة	E	F	G	H

والرموز داخل الجدول السابق ترمز لمشاهدات أو قراءات مشاهدة من واقع سجلات شركة التأمين وتعرف دائما بالرمز O . والجول السابق يمثل عينة وليس مجتمعا ومن ثم فإن نسب أو معدلات المطالبات فى كل خلية هى معالم غير معروفة لهذا المجتمع ويمكن تقديرها من المشاهدات O ، ومع استخدام» †لأساليب والأدوات الرياضية التى تفيد فيهذا المجال ، علما بأن طريقة التقدير هى طريقة المربعات الصغرى المرجحة ، وهو إسم يعرف بين الإحصائيين بال - Minimum Chi Square . هذا مع الأخذ فى الاعتبار وكما سبق أن أشرنا فى بحث سابق أن التقدير الجيد للمطالبات يجعل شركات التأمين تقوم بتكوين احتياطيات وبشكل جيد لمقابلة التزاماتها المستقبلية حتى تكون فى وضع مالى يسمح لها بالاستمرار فى مزاولة أعمالها ، وتقديم خدماتها لعملائها على أكمل وجه والوفاء بالتزاماتها حين يحل أجلها.[1]

(١) د . السيد عبد المطلب عبده ، مبادئ التأمين ، الطبعة الثالثة ، مطبعة السنة المحمدية ، القاهرة ، سنة ١٩٨٣ ، ص ٣٤٤ .

* تقدير المعالم باستخدام نموذج حاصل الضرب :

باستخدام الجدول التالى مباشرة ومع نموذج حاصل الضرب Multiplicative Model والذى يفترض أساسا أن المتغيرات المؤثرة على المطالبات مثل السن ، ونوع السيار ة ... الخ تؤثر فى مجملها على الناتج النهائى بأسلوب الضرب ، يمكن عن طريق المعيار الإحصائى المستخدم بالبحث تقدير المعالم الغير معروفة للمجتمع والتى تمكننا من تقدير عدد المطالبات كما يلى

العمر	نوع السيارة	
	النوع (أ)	النوع (ب)
أكبر من ٢٥ سنة	$\boxed{1}$ X	$\boxed{2}$ Xy
أقل من ٢٥ سنة	$\boxed{3}$ Xm	$\boxed{4}$ Xym

ويفرض أن معدل المطالبة فى الخلية الأولى من الجدول السابق مباشرة وهو الأصل فى الجدول هو X وهو المعدل المتوافق مع سيارة من النوع (ا) ولشخص عمره أكبر من ٢٥ سنة ، فنجدأن باقى المتغيرات بالجدول معكوس أثرها بأسلوب حاصل الضرب . فمثلا المعدل الموجود بالخلية الثانية وهو X Y فيه حافظنا على السن الكبير بالنسبة للمعدل الأصل وأضيف متغير آخر وهو نوع آخر للسيارة . ومعدل المطالبة الموجود فى الخلية الثالثةمن الجدول وهو X M فيه حافظنا على نوع

السيارة بالنسبة للمعدل الأصل واضيف فقط أثر عمر الشباب الأقل من ٢٥ سنة . والمعـدل الأخـيـر فى الخليـة الرابعـة من الجـدول وهو X Y M فـيـه اضـيـف أثر المتغيـرين ، نوع آخر للسـيـارة ، وعـمـر آخر للشـخص غيـر المعـروفين فى المعـدل الأصلى X . هذا مع الأخذ فى الاعتبار أن عملية إضافة أثر المتغيرات الجديدة كانت تتم بأسلوب حاصل الضرب كما هو بالجدول السابق مباشرة . وجدير بالذكر أنه من الممكن تحويل نموذج حاصل الضرب إلى جمع بأخذ اللوغاريتمات ، وهنا يصبح المقياس الإحصائى كما يلى :

$$Q = \sum \frac{(\log o - \log E)}{\text{variance}}$$

حيث O ترمز للقيم المشاهدة من واقع سجلات شركة التأمين بالنسبة لعدد المطالبات ، E القيم المتوقعة لها .

والآن نتعرض لخلفية رياضية تفيد فى هذه الجزئية من خلال النظرية الآتية [1] :

إذا كان X متغير عشوائى له التوزيع البواسونى ومتوسطة كبير ورمزه q ، لكان (Log X) له المتوسط (Log q)، وله التباين $\frac{1}{q}$

بمعنى آخر عندما تكون qالسابق الإشارة اليها كبيرة نكون بصدد الآتى :

(1) I.B. Hossack , et. al , introductory statistics with applications in general insurance , First Edition , London : Cambridge university press, 1983, P. 117

المتغير (أو دالة فيه)	المتوسط	التباين
$x \sim$ Poisson (q)	q	q
log x ------>	log q	$\frac{1}{q}$

وبذلك يصبح المعيار كما يلى :

$$Q = \sum \frac{(\log O - \log E)^2}{\frac{1}{q}}$$

$$Q = \sum q (\log O - \log E)^2$$

المشاهد

$$= \sum O \quad (\log O - \log E)^2$$

وبناء على ماسبق وباستخدام نموذج حاصل الضرب يمكن من خلال الجداول الآتيه تطبيق المعيار الإحصائى المستخدم فى البحث وهو المربعات الصغرى المرجحة والذى من شأنه أن يمكننا من تقدير المعالم الغير معروفة كما يلى :

المشاهد من المطالبات باستخدام الرموز السابقة كما بالجدول التالى :

العمر	عدد المطالبات	
	للسيارات نوع (أ)	للسيارات نوع (ب)
أكبر من ٢٥ سنة	C	D
أقل من ٢٥ سنة	G	H

والمتوقع من المطالبات وفقا لنموذج حاصل الضرب كما بالجدول الآتى :

العمر	عدد وثائق تأمين السيارات	
	للسيارات من النوع (أ)	للسيارات من النوع (ب)
أكبر من ٢٥ سنة	1 X.A	2 XY .B
أقل من ٢٥ سنة	3 Xm.E	4 Xym .F

حيث ال C , D , G ,H هى أعداد للمطالبات المشاهدة والتى تتوافق مع كل خلية بالجدول .

, A , B , E , F هى أعداد لوثائق التأمين من واقع سجلات شركة التأمين .

وبعد ذلك نحسب المعيار الإحصائى المستخدم فى البحث وفقا للمعادلة السابق الحصول عليها لنموذج حاصل الضرب وذلك لتقدير المعالم الغير معروفة للمجتمع والتى تفيد فى تقدير عدد المطالبات كما يلى

$$Q = C\,(\mathrm{Log}\,c - \mathrm{Log}\,A \,.\, X)^2 + D\,(\mathrm{Log}\,D - \mathrm{Log}\,xy \,.B)^2$$

$$+\, G\,(\mathrm{Log}\,G - \mathrm{Log}\,xm \,.\, E)^2 + H(\mathrm{Log}\,H - \mathrm{Log}\,xym \,.F)^2$$

حيث C , D , G , H هى المشاهدا ت

$X.A$, $xy.B$, $xm.E$, $xym.F$, هى المتوقع .

ومماسبق يتضح أن Q دالة فى كل من m , y , x ومن المعروف أن هذه الدالة تصل الى نهايتها الصغرى عندما يكون :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial m} = 0$$

وهذا يعطى ثلاث معادلات فى ثلاث مجاهيل هى m,y,x ويحلها يمكن الحصول على تقديرات . $\hat{m}$, $\hat{y}$, $\hat{x}$.

وبإجراء التفاضل الجزئى السابق الإشارة إليه لمعادلة حساب المعيار الحصائى المستخدم فى البحث مرة للنسبة للمتغير , X ومرة أخرى بالنسبة للمتغير Y ، وأخيرا بالنسبة للمتغير M نحصل على الآتى :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2C}{x} \quad [\log C - \log A - \log X]$$

$$+ \left(\frac{-2D}{x}\right) \quad [\log D - \log X - \log Y - \log B]$$

$$+ \left(\frac{-2G}{x}\right) \quad [\log G - \log X - \log M - \log E]$$

$$+ \left(\frac{-2H}{x}\right) \quad [\log H - \log X \log Y - \log M - \log F] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad C\left[\log \frac{c}{Ax}\right] + D\left[\log \frac{D}{xyB}\right]$$

$$+ G\left[\log \frac{G}{xmE}\right] + H\left[\log \frac{H}{xymF}\right] = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{-2D}{Y} \quad [\log D - \log x - \log y - \log B]$$

$$- \quad \frac{2H}{Y} \quad [\log H - \log x - \log y - \log M - \log F] \;= 0$$

$$<=> \quad D\,[\log \frac{D}{XYB}] \;+\; H\,[\log \frac{H}{XYMF}] = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial M} = \frac{-2G}{M} \quad [\log \frac{G}{XME}] - \frac{2H}{M} \quad [\log \frac{H}{XYMF}] = 0$$

$$<=> \quad G \quad \log [\frac{G}{XME}] \;+\; H\,[\log \frac{H}{XYMF}] = 0 \qquad (3)$$

$$<=> \quad [\log \left\{\frac{G}{xyE}\right\}^{G} \;+\; \log \left\{\frac{H}{XYMF}\right\}^{H} = 0$$

$$<=> \quad \left\{\frac{G}{XYE}\right\}^{G} \cdot \left\{\frac{H}{XYMF}\right\}^{H} = 1 \qquad 3^{*}$$

وبالقياس يمكن كتابة الآتى :

$$<=> \quad \left\{\frac{D}{XYB}\right\}^{D} \cdot \left\{\frac{H}{XYMF}\right\}^{H} = 1 \qquad 2^{*}$$

$$<=> \quad \left\{\frac{C}{AX}\right\}^{C} \cdot \left\{\frac{D}{XYB}\right\}^{D} \cdot \left\{\frac{G}{XME}\right\}^{G} \cdot \left\{\frac{H}{XYMF}\right\}^{H} = 1 \qquad 1^{*}$$

بحل المعادلتين 1^{*} ، 2^{*} عن طريق قسمة أحداهما على الأخرى نحصل على

$$\left\{\frac{G}{AX}\right\}^{C} \cdot \left\{\frac{G}{XME}\right\}^{G} = 1 \qquad (1)^{**}$$

ونخلص إلى المعادلات الثلاث الآتية :

$$\left\{\frac{C}{AX}\right\}^{C} \cdot \left\{\frac{G}{XME}\right\}^{G} = 1, \qquad (4)$$

$$\left\{\frac{D}{XYB}\right\}^{D} \cdot \left\{\frac{H}{XYMF}\right\}^{H} = 1, \qquad (5)$$

$$\left\{\frac{G}{XME}\right\}^{G} \cdot \left\{\frac{H}{XYMF}\right\}^{H} = 1, \qquad (6)$$

يلاحظ من بناء المعادلين (5) , (6) وبقسمة أحداهما على الأخرى :

$$\frac{\left\{\frac{D}{XYB}\right\}^{D}}{\left\{\frac{G}{XME}\right\}^{G}} = 1$$

$$<=> \left\{\frac{D}{xyB}\right\}^{D} = \left\{\frac{G}{xmE}\right\}^{G} \qquad (7)$$

بالتمعن فى الطرف الأيسر للمعادلة (7) نجـــــد أن إدخال أثر y على x تلازم مع وجود المؤثرين الرئيسين فى الجدولين الأولين وهما (D , B كما هو متوقع) مما يؤكد صحة النموذج وصحة الإشتقاق.

بالمثل نجد أن تفاعل M مع X استلزم وجود G, E (مرة أخرى كما هو متوقع) ٠

هاتين الملاحظتين تؤديان الى إمكانية تعميم النموذج لأى بعد دون الحاجة الى مزيد من التحليل الرياضى بمعنى أنه إذا أخذنا أى متغير وليكن R فى تفاعله مع X علينا فقط أن نعود الى الجدولين الرئيسين ونشكل حدودا مشابهة للموجودة فى المعادلة (7) ٠

ولحل المعادلات التى خلصنا اليها والتى يكون الطرف الأيمن فى كل منها مساويا واحد والطرف الأيسر لكل منها به حاصل ضرب حدين - نلفت النظر الى أن طريقة المحددات والمصفوفات لا تصلح هنا - لأن المعادلات غير خطية فى المجاهيل المراد تقديرها ولذلك يتم حلها بإستخدام الحاسب الإلكترونى بطريقة التقريب المتتالى Iterative Technique حيث نبدأ بتغذية الحاسب بالقيم المعروفة للثوابت(A,B, C , D, E , F , G , H) و حل إفتراضى أولى للمعالم المراد تقديرها و ليكن $m = 1, x = 1, y = 1$ ثم يقوم الحاسب الآلى بالتعويض والتقريب للحصول على حل جديد يبدأ منه للحصول على تقريب آخر أفضل وهكذا تستمر العملية الى أن يتقارب (Converge) الحل إلى قيم مقدرة تحقق المعادلات الثلاث فى صوره التساوى. أو أقرب ما يكون الى التساوى فى حدود خطأ مسموح به يحدده الباحث بنفسه .

ومن الجدير بالذكر أن الخبرة هنا قد تلعب دورا مهما فى التعجيل بالوصول الى الحل عن طريق بداية معقولة لقيم M, X, Y .

ونود أن نشير إلى أن الباحث تمكن حتى الآن من صياغة نموذجين رياضيين لتقدير المعالم الغير معروفة للمجتمع والتى تفيد فى تقدير المطالبات فى تأمين السيارات - أحدهما باستخدام النموذج التجميعى والآخر باستخدام نموذج حاصل الضرب . وأثناء التطبيق العملى لهذه النماذج فى بحث لاحق إن شاء الله ومع إستخدام الأدوات الرياضية يمكن ساعتها أن نقرر أفضلية نموذج على الآخر .

هذا مع إمكانية دراسة مدى حساسية كل نموذج للمتغيرات الموجودة فيه ، وذلك فى بحث آخر مستقل ، وذلك عن طريق إجراء توليفات مختلفة للمتغيرات فى النموذجين أينما ظهرت هذه المتغيرات ثم نقدر المعلمة أو المعالم المراد تقديرها ، ثم نحسب نسبة التغير فى المعلمة المقدرة باستخدام النموذج التجميعى مرة وأيضا نسبة التغير فى المعلمة المقدرة بأستخدام نموذج حاصل الضرب مرة أخرى . ونقارن مدى حساسية كل معلمة مقدرة لهذه التوليفات وفى هذه الحالة نذكى إستخدام النموذج الأقل فى حساسيته للتغيرات التى تطرأ على المعالم فى التطبيق العملى ، لأن أى تغير طفيف فى النموذج شديد الحساسية سيعطى قيمة بعيدة عن الواقع فى التطبيق العملى .

النتائج والتوصيات :

تمكن الباحث من خلال الدراسة العلمية السابقة بالبحث ومع إستخدام الأدوات الرياضية أن يصل لنموذج رياضى لتقدير المطالبات فى تأمين السيارات .

ومن خلال المعادلات التى توصل إليها الباحث أمكن إثبات صحة الأشتقاق للمعادلات، مما يؤكد صحة النموذج .هذا ويمكن حل هذه المعادلات السابق إشتقاقها بالبحث بأستخدام الحاسب الألكترونى بطريقة التقريب المتتالى Iterative Tech-nique وذلك لأن المعادلات غير خطية فى المجاهيل . لذلك يوصى الباحث بتطبيق هذا النموذج لتقدير المطالبات فى تأمين السيارات وبشكل جيد ، يجعل شركات التأمين تزاول أعمالها وهى فى وضع مالى جيد يسمح لها بالأستمرار فى العمل والنجاح .

★ المراجـــع :

أولا : كتب عربيـــة :

(١) د. السيد عبد المطلب عبده ، مبادىء التأمين الطبعة الثالثة، مطبعة السنة المحمديــــــة القاهرة ، سنة ١٩٨٣ .

ثانيا : كتب أجنبية :

(2)-Hossack, I.B. et .al introductory statistics with applications in general insurance , First Edition, London : Cambridge university Press , 1983 .

ثالثا : رسائل علميــة :

(٣)على السيد الديب ، تسعير التأمين التكميلى للسيارات الخاصة فى ج.م.ع وفقا للعوامـــــل المؤثرة فى درجـة الخطر ، رسـالة دكـتـوراه مقدمةالى قسم الرياضة والتأمين، كلية التجــــارة ،جامعة القاهرة ، سنة ١٩٩٢

تم بحمد الله