استخدام النموذج التجميعى ذات المتغيرات المتعددة

فى الوصول لأحسن تقدير لمطالبات وثائق تأمين السيارات

بحث مقدم من

د/ السباعى محمد السباعى الفقى

المدرس بقسم الرياضة والتأمين

كلية التجارة - جامعة القاهرة

تقديم :

يمكن بإستخدام النماذج الرياضية المتعددة المتغيرات (النموذج التجميعى Additive Model) الوصول لأحسن تقدير للمطالبات ، وذلك عن طريق تقدير المعالم الغير معروفة للمجتمع من خلال بيانات أو مشاهدات سابقة نحصل عليها من سجلات شركة التأمين . مع الأخذ فى الاعتبار أن النموذج التجميعى يفترض أساساً أن المتغيرات المؤثرة على المطالبات مثل السن ، ونوع السيارة .. الخ تؤثر فى مجملها على الناتج النهائى وهو عدد المطالبات بالأسلوب التجميعى . وبلغه أكثر إيضاحاً وبإستخدام الصياغة الرياضية نصل إلى الآتى : لو رمزنا لعدد المطالبات (الناتج النهائى) بالرمز ط ، وبفرض أن عدد المطالبات لتأمين السيارات يتأثر بالمتغيرات الآتية :-

السن ويرمز له بالرمز س

، نوع السيارة ويرمز له بالرمز ص ، .... الخ

فيمكن أن نصل إلى الصياغة الرياضيةالآتية : أن ط = د(س + ص + ... الخ) بإستخدام هذا النموذج التجميعى ، وهنا نريد أن نقدر النسبة أو المعدل للمطالبات من بين عدد وثائق التأمين وحيث أنه من المعروف أنه توجد متغيرات تؤثر فى هذه النسبة بالجمع مثلاً فى النموذج التجميعى فإذا كان السن يؤثر فى هذه النسبة فى حدود ٥ ٪ وكان نوع السيارة يؤثر فى حدود ٢٠ ٪ ... الخ لكانت النسبة النهائية فى ظل النموذج التجميعى (٠٥, + ٢٠, + .. الخ) التى لو ضربت فى عدد وثائق التأمين لأمكن تقدير عدد المطالبات . وجدير بالذكر أن التقدير الجيد للمطالبات يجعل شركات التأمين أيا كان نوعها تقوم بتكوين إحتياطيات وبشكل جيد لمقابلة التزاماتها المستقبلية ، حتى تكون فى وضع مالى يسمح لها بالإستمرار فى مزاولة أعمالها ، وتقديم خدماتها لعملائها على أكمل وجه ، والوفاء بالتزاماتها حين يحل أجلها .(١)

* الهدف من البحث :

يهدف هذا البحث إلى صياغة نموذج رياضى بالأسلوب التجميعى للمتغيرات المؤثرة وذلك . لتقدير المعالم الغير معروفة والتى تفيد فى تقدير عدد المطالبات مستخدمين فى ذلك المقياس الإحصائى المربعات الصغرى المرجحة Weighted Least Squares والذى يعرف بين الإحصائيين بأسلوب Minimum Chi-Square .

(١) د. السيد عبد المطلب عبده ، مبادىء التأمين ، الطبعة الثالثة ، مطبعة السنة المحمدية ، القاهرة ، سنة ١٩٨٣ ، ص ٣٤٤ .

* الصياغه الرياضيه للنموذج :

من المعروف أن معدل وقوع الحوادث داله فى عدة متغيرات مثل السن ، نوع السيارة ، .....الخ حيث أظهرت أحدى الدراسات أن العمر ونوع السيارة لهما علاقة قوية بمعدل وقوع الحوادث[1] وبفرض أننا حصلنا على بيانات سابقه من شركة تأمين بخصوص عدد وثائق التأمين وعدد المطالبات وسوف نعبر عنها بالرموز كما يلى وذلك من خلال الجدول التالى :

	عدد وثائق تأمين السيارات		عدد المطالبات	
	للسيارات نوع (أ)	للسيارات نوع (ب)	للسيارات نوع (أ)	للسيارات نوع (ب)
أكبر من ٢٥ سنه	A	B	C	D
أقل من ٢٥ سنه	E	F	G	H

والحروف داخل الجدول السابق ترمز لمشاهدات أو قراءات مشاهدة من واقع سجلات شركة التأمين وتعرف دائماً بالرمز O وللتوضيح فإن الرمز C مثلاً يرمز لعدد المطالبات من بين المؤمنين ذوى أعمار أكبر من ٢٥ سنه ويمتلكون سيارات من النوع (أ) والرمز D يرمز لعدد المطالبات من بين المؤمنين ذوى أعمار أكبر من ٢٥ سنه ويمتلكون سيارات من النوع (ب) والرمز G يرمز لعدد المطالبات من بين المؤمنين ذوى أعمار أقل من ٢٥ سنه ويمتلكون سيارات من النوع (أ) ، وأخيراً الرمز H يرمز لعدد المطالبات من بين المؤمنين ذوى أعمار أقل من ٢٥ سنه ويمتلكون سيارات من النوع (ب) ، والجدول السابق يمثل عينه وليس مجتمعاً ومن ثم فإن نسب أو معدلات المطالبات فى كل خليه هى معالم غير معروفة لهذا المجتمع ويمكن تقديرها من

(١) د. على السيد الديب ، تسعير التأمين التكميلى للسيارات الخاصة فى ج.م.ع. وفقاً للعوامل المؤثرة فى درجة الخطر ، رسالة دكتوراه مقدمة لقسم الرياضة والتأمين ، كلية التجارة - جامعة القاهرة، ١٩٩٢ ، ص ١٢ ، ٢٠

المشاهدات (O) والسؤال الذى يثار الآن هو كيف أقدر هذه النسب أو المعدلات بإستخدام الأدوات والأساليب الرياضيه ؟ والاجابه على هذا السؤال هى أنه يوجد نموذجين أحدهما يسمى بالنموذج التجميعى Additive Model ، والاخر يعرف بنموذج حاصل الضرب Multiplicative Model[1] حيث النموذج التجميعى يفترض أساساً وكما سبق الإشارة أن المتغيرات المؤثره [مثل السن ، نوع السيارة ،....الخ] تؤثر على الناتج النهائى وهو عدد المطالبات بالأسلوب التجميعى كما يتضح فيما بعد ، بينما نموذج حاصل الضرب يفترض أن هذه المتغيرات تؤثر بالضرب وسوف نخصص له بحثاً مستقلاً فيما بعد .

* طريقة التقدير :

هى طريقة المربعات الصغرى المرجحة ، وهو اسم يعرف بين الإحصائيين بالـ Minimum Chi-Square حيث من المعروف أن :-

$$\text{Chi-Square} = \Sigma \frac{(O-E)^2}{E}$$

وعندما نستبدل E (المتوقع) من المقام بـ O (المشاهد) نحصل على المربعات الصغرى المرجحة Weighted Least Squares والذى يعرف بالـ Minimum Chi-Square ، فمن المعروف أصلاً أن طريقة المربعات الصغرى هى :

$$\text{Minimize} \sum_{\text{كل الخلايا}} (O-E)^2$$

(1) I.B. Hossack, et . al, introductory statistics with applications in general insurance, First Edition, london : Cambridge university press, 1983, p. 115 .

والذى يسمى بمجموع مربعات إنحرافات المشاهدات عن المتوقع Sum Square of Errors . ويرمز له بالرمز S.S.E وعندما يكون هذا الفرق نهايه صغرى تكون تقديراتنا طيبه ، ولكن الصعوبة تكمن فى إمكانية إختلاف المشاهدات فى الخلايا إختلافاً كبيراً ، مما يؤثر على دقة هذا المقياس وهنا يجب إستبداله بالمربعات الصغرى المرجحه ، والترجيح هنا يكون بالقسمة على تباين كل مشاهدة فى كل خلية - وعادة ما يتبع توزيع المشاهدات فى الخلايا توزيع بواسون له وسط حسابى وتباين يساوى تقريباً المشاهد ومن ثم يعدل المقياس إلى :

$$\text{Min.} \ \Sigma \frac{(O-E)^2}{O}$$

* تقدير المعالم بإستخدام النموذج التجميعى :

بإستخدام الجدول التالى مباشرة وأيضاً النموذج التجميعى الذى يفترض أساساً أن المتغيرات المؤثرة على المطالبات مثل السن ونوع السيارة ..الخ تؤثر فى مجملها على الناتج النهائى بالأسلوب التجميعى ، يمكن عن طريق المعيار الإحصائى المستخدم فى البحث تقدير المعالم الغير معروفة للمجتمع والتى تساعد فى تقدير عدد المطالبات كما يلى :-

العمر	نوع السيارة	
	النوع (أ)	النوع (ب)
أكبر من ٢٥ سنة	X	X + Y
أقل من ٢٥ سنة	X + M	X + Y + M

بفرض أن معدل المطالبة فى الخليه الأولى من الجدول السابق مباشرة هو X وهو معدل المطالبه المتوافق مع سيارة من النوع (أ) ولشخص عمره أكبر من ٢٥ سنه وهو الأصل فى الجدول ، أما المعدل (X+Y) فهنا حافظنا على السن الكبير وأضيف متغير آخر وهو نوع آخر للسيارة ، والمعدل (X+M) فيه حافظنا على نوع السيارة وأضيف فقط أثر عمر الشباب الأقل من ٢٥ سنه ، والمعدل الأخير (X+Y+M) فيه أضيف المتغيرين نوع آخر للسيارة ، وعمر آخر للشخص غير المعروفين فى المعدل الأصل X .

والهدف الآن هو الوصول لأحسن تقدير لكل من X,M,Y وهى معالم غير معروفة – ونحن بصدد تقديرها بأفضل ما يمكن من تقديرات .

ومن البديهى أنه عندما يتم ضرب معدل المطالبات فى عدد وثائق التأمين نحصل على عدد المطالبات ، فلو كنا نعلم المعدل الحقيقى فى المجتمع وهو المراد تقديره وضربناه فى عدد الوثائق لأعطانا المتوقع من المطالبات .

أى أن المتوقع من المطالبات = المعدل المراد تقديره × عدد الوثائق لهذا النوع من التأمين

وبناء على ماسبق ومن خلال الجداول الآتيه يمكن تطبيق المعيار الإحصائى المستخدم فى البحث ثم تقدير المعالم كما يلى :

المشاهد من المطالبات بإستخدام الرموز السابقة بالجدول الآتى :

العمر	عدد المطالبات	
	للسيارات نوع (أ)	للسيارات نوع (ب)
أكبر من ٢٥ سنة	C	D
أقل من ٢٥ سنة	G	H

والمتوقع من المطالبات كما هو الجدول الآتى :

العمر	عدد وثائق تامين السيارات	
	للسيارات من النوع (أ)	للسيارات من النوع (ب)
أكبر من ٢٥ سنة	$\boxed{1}$ X . A	$\boxed{2}$ (X + Y) .B
أقل من ٢٥ سنة	$\boxed{3}$ (X + M) .E	$\boxed{4}$ (X + Y+ M) .F

حيث هنا يفترض أن الـ A , B , E , F هى أرقام مشاهدات معلومه من واقع سجلات شركة التأمين لعدد وثائق التأمين وبعد ذلك نقوم بحساب المعيار الإحصائى المستخدم فى البحث لتقدير المعالم الغير معروفة للمجتمع والتى تفيد فى تقدير عدد المطالبات وهو معيار المربعات الصغرى المرجحة كما يلى :

$$Q = \frac{(C - AX)2}{C} + \frac{(D - (X+Y).B)2}{D} +$$

$$\frac{(G - (X + m) .) E^2}{G} + \frac{(H - (X + Y + m) .F)^2}{H}$$

حيث H, G,D,C هى المشاهدات (X+M).E , (X+Y).B, X.A, (X + Y + m) .F, هى المتوقع.

ومما سبق يتضح أن Q دالة فى كل فى من X,Y,M ومن المعروف أن هذه الدالة تصل إلى نهايتها الصغرى عندما يكون :

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial m} = 0$$

وهذا يعطى ثلاث معادلات فى ثلاث مجاهيل هى M,Y,X وبحلها يمكن الحصول على تقديرات x, y, m. وفى هذه الحالة يمكن حل الثلاث معادلات

الخطية بإستخدام المحددات أو المصفوفات ، وعندما يكون هناك عدد أكبر من المعالم المراد تقديرها والذى من شأنه يزيد من عدد المعادلات ، فى هذه الحالة يمكن إستخدام البرامج الجاهزة فى الحل .

* إمكانية الحصول على المعادلات السابقة بالتفاضل الجزئى مع دراستها :

بإجراء التفاضل الجزئى لمعادلة حساب المعيار الإحصائى المستخدم فى البحث وهو المربعات الصغرى المرجحة والتى سبق إعدادها . وذلك بإجراء التفاضل مرة بالنسبة للمتغيرة x، ومرة أخرى بالنسبة للمتغير Y ، وأخيراً إجراء التفاضل بالنسبة للمتغير m نحصل على الآتى :

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = \frac{-2A}{C} \quad (C - x . A) \quad - \quad \frac{2B}{D} \quad \{ D - (x + y) B \}$$

$$\frac{-2E}{G} \quad \{ G - (x + m) E \}$$

$$\frac{2F}{H} \quad \{ H - (x + y + m) F \} = o$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2A^2}{C} + \frac{2B^2}{D} + \frac{2E^2}{G} + \frac{2F^2}{H}\right) X$$

$$\left(\frac{2B^2}{D} + \frac{2F^2}{H}\right) Y$$

$$\left(\frac{2E^2}{G} + \frac{2F^2}{H}\right) m$$

$$= 2A + 2E + 2F$$

$$+ \left(\frac{A^2}{C} + \frac{B^2}{D} + \frac{E^2}{G} + \frac{F^2}{H}\right) X +$$

$$\left(\frac{B^2}{D} + \frac{F^2}{H}\right) Y + \left(\frac{E^2}{G} + \frac{F^2}{H}\right) m$$

$$= A + E + F \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{-2B}{D}\left(D - (X+Y)B\right) - \frac{2F}{H}\left(H - (X+Y+m)F\right) = o$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2B^2}{D} + \frac{2F^2}{H}\right) X + \left(\frac{2B^2}{D} + \frac{2F^2}{H}\right) Y + \frac{2F^2}{H} m =$$

$$2B + 2F$$

$$\left(\frac{B^2}{D} + \frac{F^2}{H}\right) X + \left(\frac{B^2}{D} + \frac{F^2}{H}\right) Y + \frac{F^2}{H} m$$

$$= B + F \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial m} = -\frac{2E}{G}\left(G - (X+m)E\right) - \frac{2F}{H}\left(H - (X+Y+m)F\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\left(\frac{E^2}{G} + \frac{2F^2}{H}\right)X + \frac{F^2}{H}Y + 2\left(\frac{E^2}{G} + \frac{F^2}{H}\right)m$$

$$= 2E + 2F$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{E^2}{G} + \frac{F^2}{H}\right)X + \frac{F^2}{H}Y + \left(\frac{E^2}{G} + \frac{F^2}{H}\right)m$$

$$= E + F \qquad (3)$$

والآن نعيد كتابة المعادلات الثلاث السابق الحصول عليها وهى :

$$* \left(\frac{A^2}{C} + \frac{B^2}{D} + \frac{E^2}{G} + \frac{F^2}{H}\right)X + \left(\frac{B^2}{D} + \frac{F^2}{H}\right)Y$$

$$+ \left(\frac{E^2}{G} + \frac{F^2}{H}\right)m = A + E + F \qquad (1)$$

$$* \left(\frac{B^2}{D} + \frac{F^2}{H}\right)X + \left(\frac{B^2}{D} + \frac{F^2}{H}\right)Y + \frac{F^2}{H}m$$

$$= B + F \qquad (2)$$

$$* \left(\frac{E^2}{G} + \frac{F^2}{H}\right)X + \frac{F^2}{H}Y + \left(\frac{E^2}{G} + \frac{F^2}{H}\right)m$$

$$= E + F \qquad (3)$$

وبتدقيق النظر فى هذه المعادلات نصل إلى ملاحظات هامة كالآتى :

ملاحظات على المعادلات المعتادة :

(١) يلاحظ أن X (تمثل العامل الرئيسى بالخلية الأولى بالجدول - ولا وجود للعوامل الأخرى Y,m) تظهر فى المعادلة الأولى مرتبطة بجميع المشاهدات A,B,E,F وأيضاً بجميع عدد المطالبات C,D,G,H

(٢) من الجدول يلاحظ أن الخليتين الثانية والرابعة يتزامل فيها X مع Y إذن لابد أن نتوقع أن تكون معاملاتها فى المعادلات دوال فى B,F من الجدول الثانى بالإضافة إلى D,H من الجدول الأول وهو فعلاً ماحدث فى المعادلة الثانية .

(٣) كذلك نلاحظ أن X , m تتزاملان فى الخلايا 3,4 ولابد أن نتوقع أن تكون معاملاتها دوال فى E,F من الجدول الثانى ، H,G من الجدول الأول وهو بالضبط ماحدث فى المعادلة الثالثة مما يؤكد صحة النموذج وصحة الإشتقاق لكل المعادلات الثلاث السابقة

هذه الملاحظات الواردة فى (١) ، (٢) ، (٣) توحى بإمكانية تعميم النموذج إلى جداول ٣ × ٣ أو ٤ × ٤ أو ... أو بصفة عامة ن × ن . ونستطيع ساعتها أن نحدد العوامل التى تؤثر على تزامل أى متغيرين إختياريين من المتغيرات الأساسية ، وذلك بالنظر إلى مرافقاتها فى الجدولين الأول والثانى كما حدث فيما سبق بالمثال .

والآن أريد أن أوضح أن هناك نماذج رياضية أخرى يمكن تطبيقها فى هذا المجال، أى يمكن معالجة المشكلة بأسلوب رياضى آخر فى شكل نموذج حاصل الضرب وسوف نفرد له بحثاً مستقلاً فيما بعد .

هذا من ناحية ومن ناحية أخرى يمكن إجراء التطبيق العملى لهذه النماذج فى بحوث لاحقة ثم نقوم بمقارنة النتائج المتحصل عليها من النموذجين (النموذج التجميعى ونموذج حاصل الضرب) وذلك بافتراض نفس الـ H , G , F , E , D , C , B , A فى النموذجين ، ثم نحسب معيار مجموع مربعات الانحرافات للمشاهد عن المتوقع (s. s. e) لكل من النموذجين وعلى ضوءه نقرر ساعتها أفضلية نموذج على الآخر .

هذا ومع الأخذ فى الاعتبار أنه أيضاً يمكن إجراء دراسة مدى حساسية كل نموذج للمتغيرات الموجودة فيه وذلك بالإجابة على التساؤلات الآتية :

ما الذى سيحدث لو كبرنا الـ A وصغرنا الـ B ، ... الخ وإجراء توليفات معينة من هذه القيم حتى نصل إلى وضع معين يكون الأفضل بالنسبة لنموذج معين باستخدام معيار (s. s. e) بعد كل توليفة ، مع إجراء هذه الدراسة لتحليل الحساسية على نمطين نمط مطلق ونمط نسبى .

النتائج والتوصيات : -

تمكن الباحث من خلال الدراسة العلمية السابقة وباستخدام الأدوات الرياضية أن يتوصل إلى نموذج رياضى لتقدير المطالبات لوثائق تأمين السيارات عن طريق تقدير المعالم الغير معروفة للمجتمع والتى تفيد فى ذلك ومن خلال المعادلات التى توصل اليها الباحث أمكن إثبات صحة الإشتقاق لهذه المعادلات مما يؤكد صحة هذا النموذج ، وإمكانية تعميمة على أية جداول بأى بعد كما هو البحث . لذلك يوصى الباحث بتطبيق هذا النموذج لتقدير المطالبات فى تأمين السيارات وبشكل جيد وسوف يتم ذلك إن شاء الله فى بحوث لاحقة .

المراجع

أولاً : كتب عربية :

(١) د. السيد عبد المطلب عبده ، مبادىء التأمين ، الطبعة الثالثة ، مطبعة السنة المحمدية ، القاهرة ، سنة ١٩٨٣ .

ثانياً : كتب أجنبية :

(٢) Hossack, I.B.et.al, Introductory Statistics with Applications in General Insurance, First Edition, London: Cambridge University Press, 1983.

ثالثاً : رسائل علمية :

(٣) على السيد الديب ، تسعير التأمين التكميلى للسيارات الخاصة فى ج.م.ع. ، وفقاً للعوامل المؤثرة فى درجة الخطر ، رسالة دكتوراه مقدمة إلى قسم الرياضة والتأمين ، كلية التجارة ، جامعة القاهرة ، سنة ١٩٩٢ .

تم بحمد الله .