مقارنة بين بعض الأساليب الإحصائية لاختبار معنوية الفرق بين متوسطي مجتمعين

د. مصطفى جلال مصطفى

كلية العلوم - جامعة الملك عبدالعزيز

I مقدمة

هناك العديد من الأساليب الإحصائية التي تهدف إلى إختبار جوهرية الفرق بين مجتمعين . وتتفق جميع أساليب الإختبار على تحديد قيمة حرجة (Critical Valuc) للإحصاء المستخدم طبقاً لمستوى المعنوية (Level of Significent) الذي يتم الإختبار بموجبه ولكن تختلف هذه الأساليب فيما بينها في عدة أمور أهمها كيفية تحديد مثل هذه القيمة الحرجة وكيفية إيجاد القيمة الإحصائية التي سوف يتم مقارنتها بهذه القيمة الحرجة وأيضاً تختلف هذه الأساليب فيما بينها في بعض الفروض الإحصائية التي بناء عليها يتم إيجاد مختلف القيم الإحصائية ذات الدلالة في إجراء الإختبار .

ويهدف هذا البحث إلى إجراء مقارنة بين بعض الأساليب الإحصائية التي ناقشت مثل هذا الإختبار .

بفرض أن X_{ij} تمثل المفردة j في المجموعة i $(j = 1, 2, \ldots\ldots, n_i)$ حيث $(i = 1, 2, \ldots\ldots, k)$ وبالتالي فإن n_i هي حجم العينة العشوائية من المجموعة i كما أن قيم X_{ij} تتوزع طبيعياً بمتوسط μ_i وتباين σ_i^2 . ويكون أفضل تقدير خطي غير متحيز لكل من μ_i ، σ_i^2 هو :

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \overline{X}_i \right)^2$$

وبإفتراض تجانس التباين بين المجموعات فإن التباين المجمع (Pooled Variance) من العينات العشوائية والذي يمثل أفضل تقدير للتباين σ^2 يكون في الصورة

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \overline{X}_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \left(n_i - 1 \right)}$$

ويمكن إعتبار أن أسلوب الإختبار للفرض العدمي (Null Hyp.) القائل بأن :

$$H_0 : \qquad \mu_i - \mu_{i'} = 0 \qquad (1 \le i < i' \le k)$$

هو إيجاد t_0 حيث :

$$t_0 = \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}}{\sqrt{\hat{V}\left(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}\right)}}$$

$$t_0 = \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}}{\hat{\sigma}\left(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}\right)} \qquad (1-1)$$

حيث $\hat{V}\left(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}\right)$ ، $\hat{\sigma}\left(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}\right)$ التباين المقدر ، الخطأ المعياري المقدر للفرق بين المتوسطين $\bar{X}_i$ ، $\bar{X}_{i'}$

ويتم رفض الفرض العدمي السابق بمستوى معنوية α حينما تكون القيمة المطلقة للإحصاء t_0 أكبر من القيمة الحرجة للإختبار والتي سنرمز لها CV أي عندما تكون :

$$\left|\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}\right| > \hat{\sigma}\left(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}\right).CV \qquad (2-1)$$

وسنطلق على الطرف الأيمن من (2-1) الناتج الحرج (Critical Product) وسنرمز له بالرمز CP .

أي أنه يتم رفض الفرض العدمي H_0 حينما تكون :

$$\left|\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}\right| > CP$$

II - بعض أساليب إختبار الفرق بين المتوسطين بإفتراض تجانس التباين :

نناقش فيما يلي بعض الأساليب الإحصائية الخاصة بإختبار الفرق بين المتوسطين .

وحيث تمثل (1) التباين المقدر للفرق بين متوسطي العينتين .

(2) القيمة الحرجة للإختبار CV .

1 - KRAMER (1956)

(1) $S^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right)$

(2) $q\,(\alpha, k, r)$

حيث نحصل على قيم q من جداول Studentized augument range وذلك طبقاً لمستوى المعنوية α ودرجات الحرية r وعدد المتوسطات k .

2 - SCHEFFE (1959)

(1) $S^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right)$

(2) $(k-1)\,F\,(\alpha, k-1, r)$

حيث قيمة F بدرجات حرية r, k-1 ومستوى معنوية α .

3 - SPJOTVOLL and STOLINE (1973)

(1) $S^2 \{ 2/\min(n_i, n_{i'}) \}$

(2) $q'(\alpha, k, r)/\sqrt{2}$

حيث نحصل على قيم 'q من جداول Studentized augument range مع ملاحظة أنه عندما $2 < k$ ، $\alpha \geq 5\%$ فإن قيم q تعتبر تقريباً جيداً لقيم 'q غير المبوبة .

4 - HOCHBERG'S GT2 (1974)

(1) $S^2 \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)$

(2) $m(\alpha, k, r)$

حيث نحصل على قيم m من جداول Studentized augument range

5 - DUNN (1974)

(1) $S^2 \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)$

(2) $t_{\alpha/2, k, r}$

6 - GABRIEL (1978)

$$(1) \qquad S^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2 n_i}} + \frac{1}{\sqrt{2 n_{i'}}} \right)^2$$

$$(2) \qquad m\,(\alpha, k, r)$$

حيث نحصل على قيم m من جداول Studentized augument range

III - بعض اساليب إختبار الفرق بين المتوسطين التي لا تفترض تجانس التباين :

عند إجراء أحد الإختبارات السابقة فإن قيمة الخطأ الأول α تتأثر إذا لم يتحقق شرط تجانس التباين . ونظراً لأنه من غير الممكن معرفة قيمة تباين المجتمع على وجه الدقة إلا من خلال معرفة جميع مفردات المجتمع وهو أمر مستبعد حالياً بالإضافة إلى أن جميع الإختبارات السابقة تكون not robust حينما لا يتساوى حجم العينات الخاصة بإختبار فرق المتوسطين وأيضاً لإستخدام التباين المجمع ، فإننا نستعرض فيما يلي بعض الأساليب الإحصائية لإجراء الإختبار المستهدف والتي لا تفترض تجانس مجتمعات الدراسة ، ونلاحظ أن جميع هذه الإختبارات لا تستخدم التباين المجمع Pooled variance ولكنها تعتمد على تقدير فيشر للتباين للفرق بين متوسطي عينتي الإختبار والذي هو في الصورة :

$$\hat{V}\left(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}\right) = \left[\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_{i'}^2}{n_{i'}} \right]$$

كما أن بعض هذه الإختبارات يستخدم درجات الحرية التي قدمها WELCH حيث درجات الحرية (df) في الصورة :

$$df = \frac{\left(\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_{i\cdot}^2}{n_{i\cdot}}\right)^2}{\frac{S_i^4}{n_i^2\,(n_i - 1)} + \frac{S_{i\cdot}^4}{n_{i\cdot}^2\,(n_{i\cdot} - 1)}}$$

وجدير بالذكر أن درجات الحرية df تتراوح بين الحد الأدنى لأي من $(n_{i\cdot} - 1 \ , \ n_i - 1)$ وبين $(n_1 + n_2 - 2)$ وإن كان PRATT (1964) قد أوضح أنه يمكن أخذ الحد الأعلى لدرجات الحرية والذي هو $n_1 + n_2 - 2$ إذا ما تحقق على الأقل أحد الشروط الأربعة التالية .

a - $\frac{9}{10} \le \frac{n_i}{n_{i\cdot}} \le \frac{10}{9}$

b - $\frac{9}{10} \le \frac{\left(S_i^2 / n_i\right)}{\left(S_{i\cdot}^2 / n_{i\cdot}\right)} \le \frac{10}{9}$

c - $\frac{4}{5} \le \frac{n_i}{n_{i\cdot}} \le \frac{5}{4}$ and $\frac{1}{2} \le \frac{\left(S_i^2 / n_i\right)}{\left(S_{i\cdot}^2 / n_{i\cdot}\right)} \le 2$

d - $\frac{2}{3} \le \frac{n_i}{n_{i\cdot}} \le \frac{3}{2}$ and $\frac{3}{4} \le \frac{\left(S_i^2 / n_i\right)}{\left(S_{i\cdot}^2 / n_{i\cdot}\right)} \le \frac{4}{3}$

وكما أوضحنا سابقاً فإن (1) تمثل التباين المقدر للفرق بين المتوسطين في حالة عدم تجانس تباين المجتمعات، (2) تمثل القيمة الحرجة للإختبار CV

1 - COCHRAN (1964)

$$(1) \quad \left(\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_{i'}^2}{n_{i'}}\right)$$

$$(2) \quad t'_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{w_i \, t_i + w_{i'} \, t_{i'}}{w_i + w_{i'}}$$

حيث :

$$w_i = \frac{S_i^2}{n_i} \quad , \quad w_{i'} = \frac{S_{i'}^2}{n_{i'}}$$

$$t_i = t_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{with} \quad n_i - 1 \quad \text{df}$$

$$t_{i'} = t_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{with} \quad n_{i'} - 1 \quad \text{df}$$

2 - URY and WIGEINS (1971)

$$(1) \quad \left(\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_{i'}^2}{n_{i'}}\right)$$

$$(2) \quad t_{\alpha, k, r}$$

3 - GAMES and HOWELL (1976)

(1) $\left(\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_{i'}^2}{n_{i'}}\right)$

(2) $\left| (k-1)\ F\ (\alpha,\ k-1,\ r) \right|^{1/2}$

4 - DUNNET (1980)

(1) $\left(\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_{i'}^2}{n_{i'}}\right)$

(2) $m\ (\alpha,\ k,\ r)$

IV مثال حسابي

حتى يمكننا المقارنة بين مختلف الأساليب السابقة لنفترض أنه قد تم إختيار عينات عشوائية من مجتمعات تتوزع طبيعياً حيث :

$n_1 = 6$, $n_2 = 10$

$S_1^2 = 78$, $S_2^2 = 30$

يوضح الجدول التالي كل من القيم الحرجة والتباين المقدر ، والخطأ المعياري المقدر ، والناتج الحرج وذلك للأساليب المختلفة لكل من KRAMER (K) ، SCHEFEE' (SC) ، SPJOTVOLL and STOLINE (SS) ، HOCHBERG (H) ، DUNN (D) ، GABRIEL (G) .

	CV	$\hat{V}(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'})$	$\hat{\sigma}_{\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}}$	CP
K	2.434	12.571	3.546	8.630
SC	2.542	12.571	3.546	9.014
SS	2.440	12.571	3.546	8.652
H	2.488	12.571	3.546	8.822
D	2.499	12.571	3.546	8.861
G	2.488	12.571	3.546	8.822

جدول رقم (١)

كما يوضح الجدول التالي كل من القيم الحرجة والتباين المقدر ، والخطأ المعياري المقدر ، والناتج الحرج وذلك لأساليب الإختبار الخاصة بكل من GAMES and HOWELL (GH) ، URY and WIGEINS (UW) ، COCHRAN (C) ، DUNNET (D) .

	CV	$\hat{V}(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'})$	$\hat{\sigma}_{\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}}$	CP
C	4.481	16.0	4.0	17.922
UW	3.408	16.0	4.0	13.632
GH	3.163	16.0	4.0	12.652
D	3.313	16.0	4.0	13.253

جدول رقم (٢)

V الخلاصة

يمكن القول أنه

١ - عند تجانس التباين بين المجتمعات فإن إستخدام أسلوب SCHEFFE يحدد أكبر قيمة حرجة يمكن أن يخضع لها الإختبار .

٢ - تتقارب قيم الناتج الحرج لباقي الأساليب الأخرى عند تجانس التباين ولكن تظل مشكلة أن أداء الإختبار بأحد هذه الأساليب يعتبر (Not Robust) نظراً لإستخدام التباين المجمع من العينات كتقدير لتباين المجتمع .

٣ - يمثل أسلوب COCHRAN أكثر الأساليب مأمونية في الإختبار نظراً لأن القيمة الحرجة الخاصة بالإختبار تكون غالباً أكبر من القيم الحرجة لباقي الإختبارات . وقد أوضح DUNNET (1980) أنه دائماً سنجد أن :

COCHRAN CV >GAMES-HOWELL CV وسيتساوى فقط عندما يكون التباين معلوماً على وجه الدقة . كما أوضح أيضاً أن الإختبارات المقدمة من كل من DUNNET ، COCHRAN تعطي للخطأ الأول α قيمة فعلية أقل من قيمته النظرية فيما يعطي الإختبار المقدم من GAMES-HOWELL قيمة للخطأ الأول α أكبر قليلاً من قيمته النظرية .وأوضح أخيراً أن القيمة الحرجة CV للإختبار الذي قدمه ستكون أكبر من القيمة الحرجة لإختبار COCHRAN عندما تكون درجات الحرية كبيرة ، ومن ثم يكون من الأفضل عدم إستخدام أسلوب DUNNET في هذه الحالة وإنما يفضل إستخدام هذا الأسلوب عندما تكون درجات الحرية صغيرة نظراً لأن القيمة الحرجة للإختبار CV ستكون في هذه الحالة أقل من القيمة الحرجة لإختبار COCHRAN .

REFERENCES

1 - Cochran, W., "Approximate significance levels of the Behrens-Fisher test", BIOMETRICS, (1964), 20, 191_195.

2 - Dunn, O., "Multiple comparison among means", JASA, (1961), 56, 52-64.

3 - Dunnet, C., "Pairwise multiple comparison in the unequal variance case", JASA, (1980 b), 75, 796-800.

4 - Gabriel, K., "A simple method of multiple comparison of means", JASA, (1978), 73, 724-729.

5 - Games, P., and Howell, J., "Pairwise multiple comparison procedure with unequal N's and or variances". j. of Educational Statistics, (1976), 1, 113-125.

6 - Harter, L., "Tables of Rrange and Studentized Range", Annals of Math Stat, (1960), 31, 1122-1147.

7 - Hochberg, Y., "Some generalizations of the T-method in simultaneous inferences". J. of Multivariate Analysis, (1974), 4, 224-234.

8 - Larsen, R., and Marx, M., An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications, 1986, Prentice-Hall, 2nd ed., New Jersey.

9 - Kramer, C., "Extension of multiple range test to group means with unequal numbers of replications", Biometrics, (1956), 12, 307-310.

10 - Pratt, J., "Robustness of Some Procedures for the Two-Sample Location Problem", JASA, (1964), 59, 665-680.

11 - Scheffè, H., "The Analysis of Variance", J. Wiley, N.Y., 1959.

12 - Spjotvoll, E., and Stoline, M., "An extension of the T-method of multiple comparison to include the cases with unequal sample sizes", JASA, (1973), 69, 975-978.

13 - Ury, H. and Wiggins, A., "Large sample and other multiple comparison among means", British J. of Mathematical and Statistical Psychology, (1971), 24, 174-194.